

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-79-88  
УДК 624.07+629.5.015.4

М.Ю. Миронов  
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия

## ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНСТРУКЦИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОТКЛИКОВ

**Объект и цель научной работы.** Работа посвящена управлению динамическими свойствами конструкций, нагрузка на которые имеет нестационарный характер, соответствующий заданному частотному спектру. На основе ранее полученных [8, 15] матричных зависимостей анализа чувствительности построены и программно реализованы эффективные итерационные алгоритмы проектирования на основе удовлетворения условий оптимальности Куна – Таккера.

**Материалы и методы.** Используются балочный метод конечных элементов (МКЭ) в варианте метода перемещений, аналитические и полуаналитические методы получения производных от частот, форм, а также интегрально осредненных по пространству конструкции и времени нестационарных перемещений, метод простых итераций с релаксационным сглаживанием, методы линеаризации рекуррентных соотношений условий оптимальности и сведения условной задачи минимизации к безусловной с помощью множителей Лагранжа.

**Основные результаты.** Для конечно-элементной модели балки с большим числом конечных элементов (КЭ) решены задачи минимизации массы при ограничении интегральной нормы прогиба для различных нестационарных возбуждений на заданном временном отрезке. Произведено сравнение точности и эффективности оптимизационных процедур с применением прямого дифференцирования неявной разностной схемы и с применением метода разложения отклика по собственным формам.

**Заключение.** Получены схожие результаты для разных методов расчета нестационарного отклика и анализа чувствительности. Показано эффективное управление распределением по конструкции массы и жесткости с высокими относительными выигрышами в изопериметрической постановке.

**Ключевые слова:** не прямые методы оптимизации, анализ чувствительности, балочные конечные элементы, производные от нестационарных перемещений, метод главных координат, схема Ньюмарка, интегральные ограничения, множители Лагранжа.

*Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-79-88  
UDC 624.07+629.5.015.4

M.Yu. Mironov  
St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

## OPTIMIZATION OF MULTI-ELEMENT MODELS OF STRUCTURES WITH INTEGRAL CONSTRAINTS ON UNSTEADY RESPONSES

**Object and purpose of research.** The study focuses on management of dynamic parameters of structures, the load on which has unsteady character in accordance with a given frequency spectrum. Based on the earlier obtained [8, 15] matrix relations of sensitivity analysis, effective design iteration algorithms, which satisfy Kuhn–Tucker optimum conditions, are developed and implemented in software.

**Materials and methods.** The methods used are a displacement method version of the beam finite-element technique, analytical and semi-analytical methods of taking a derivative with respect to frequencies, shapes as well as unsteady displace-

*Для цитирования:* Миронов М.Ю. Оптимизация многоэлементных моделей конструкций с интегральными ограничениями нестационарных откликов. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 2(400): 79–88.

*For citations:* Mironov M.Yu. Optimization of multi-element models of structures with integral constraints on unsteady responses. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 2(400): 79–88 (in Russian).

ments of structure integrally averaged in space and time, methods of simple iterations with relaxation smoothening, methods of linearization of recurrent relations of optimality conditions and reduction of conditional minimization problem to unconditional problem using Lagrange factors.

**Main results.** For FE beam model with a large number of finite elements, minimization mass problems are solved at restricted integral norm of deflection for various unsteady excitation at a given time interval. Comparison of optimization procedures are made for accuracy and efficiency using direct implicit differentiation of difference scheme and normal mode method for response.

**Conclusion.** Similar results are obtained by different methods of calculating the unsteady response and performance of sensitivity analysis. Efficient management of the mass and stiffness distribution is demonstrated with a relatively high gain in isoperimetric formulation.

**Keywords:** indirect optimization methods, sensitivity analysis, beam finite elements, derivatives of unsteady displacements, method of normal coordinates, Newmark beta-method, integral constraints, Lagrange factors.

*The author declares no conflicts of interest.*

## Введение

### Introduction

В работе [15] представлена постановка задачи однокритериальной оптимизации линейно-упругой конструкции морского сооружения как многостепенной колебательной системы, когда путем перераспределения проектных параметров (размеров сечений связей, толщин листов, размеров шпаций или иных взаимных отстояний связей и т.п.) мы стремимся снизить материалоемкость при ограничениях на значения собственных частот и/или значения характерных динамических перемещений, деформаций, напряжений, т.е. параметры динамического отклика.

Возможна обратная постановка, когда минимизируемым критерием качества становится параметр отклика, а на материалоемкость наложены ограничения. В работе [11], в частности, на примере оптимизации изначально призматической балки продемонстрирована двойственность постановки задач минимизации массы с ограничением на низшую собственную частоту и максимизации частоты при ограничении массы, если ограничения сформулированы как изопериметрические.

Отклик конструкций на динамическое возмущение является в общем случае мультимодальным. Проектное снижение массы при сохранении надежности может быть реализовано либо косвенно, путем отстройки от резонансов по одной или нескольким частотам, либо напрямую, с ограничением значений конкретных виброперемещений, скоростей или ускорений. Во взаимной постановке сохраняемую массу следует перераспределить, минимизируя амплитуды отклика, либо переходить к многокритериальной оптимизации по нескольким собственным частотам.

Работа с собственными частотами требует для каждого проектного варианта лишь разрешения

проблемы собственных значений, и в этом – привлекательность таких постановок, однако предусмотреть, какие из собственных частот наиболее активны в оптимальном проекте, можно только в простейших случаях. Решение нестационарной задачи во много раз увеличивает необходимые вычисления и создает известные проблемы с точностью и устойчивостью решения во времени.

В спектральном представлении воздействий и откликов речь может идти о поиске проекта конструкции, продуцирующей оптимальную передаточную функцию. В линейной теории сейсмостойкости, рассматривающей частный случай возмущения конструкций связанными спектрами перемещений, скоростей или ускорений опорного контура, спектральный отклик сооружения ищется как интегральный квазистатический [16], причем возможны различные виды норм, часто – на базе евклидовой нормы.

При отсутствии необходимости учета распределения силовой нагрузки по конструкции модальные составляющие инерционных нагрузок отыскиваются как произведения форм свободных колебаний на коэффициенты модального участия (соответствующие значения возмущающего спектра) и прикладываются к системе как статические [16], т.е. далее отклик получают обращением матрицы жесткости. К сожалению, для морских сооружений, особенно плавучих, инерционные нагрузки далеко не всегда являются расчетными. Получение же схемы полного спектрального расчета для произвольной природы нагрузки связано с преобразованием Фурье левой и правой частей нестационарной матричной задачи, причем дискретное преобразование Фурье, применяемое в вычислительных алгоритмах, налагает специфические требования на дискретизацию по времени и по частотам.

В итоге оптимизация для «спектральной» схемы получения откликов – предмет перспек-

тивной разработки, а наиболее близка к ней оптимизация нестационарно колеблющихся систем, связанная с интегральным осреднением отклика по времени наблюдения за системой и по всему пространству конструкции. Подход, сформулированный в [4], пока оказывается наиболее приемлемым. Для конечно-элементных моделей подход был реализован автором в [8] с применением разностных схем интегрирования матричного уравнения динамики.

Подход дал положительные результаты [9], однако верификация его была выполнена лишь аналитическим решением для континуальной системы (балки) с применением для анализа чувствительности задачи о сопряженной функции [4]. Общий же случай верификации для дискретной системы может быть рассмотрен только при получении формул анализа чувствительности нестационарного отклика, являющегося суперпозицией форм колебаний. Полученные в [15] матричные выражения для производных от собственных форм колебаний позволяют в замкнутой форме получить и производные от нестационарного отклика, а значит – сравнить их с результатом прямого формального дифференцирования разностной схемы и перейти непосредственно к оптимизации, что и составляет цель настоящего исследования.

## Матричные выражения для коэффициентов чувствительности нестационарных динамических перемещений конструкций

Matrix relations for sensitivity coefficients of unsteady dynamic displacements of structures

В случае получения отклика невязкой колебательной  $n$ -степенной системы методом разложения по формам (методом главных координат, МГК) полная производная от нестационарного вектора обобщенных перемещений по  $j$ -й переменной проектирования есть суперпозиция [15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{Q(t)\}}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\{A\}_i q_i(t))}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial\{A\}_i}{\partial x_j} q_i(t) + \{A\}_i \frac{\partial q_i(t)}{\partial x_j} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где производная от  $i$ -й формы

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{A\}_i}{\partial x_j} &= \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ [D^*(x, \lambda_i)]^{-1} \cdot \left( \frac{\partial\{B^*(x, \lambda_i)\}}{\partial x_j} - \frac{\partial[D^*(x, \lambda_i)]}{\partial x_j} \{A^*\}_i \right) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

причем  $D^*$  – часть динамической матрицы системы без 1-го столбца и 1-й строки,  $B^*$  – 1-й столбец этой матрицы без 1-го элемента, аналогично выделяются и соответствующие части производной от динамической матрицы, вычисляемой как

$$\begin{aligned} \frac{\partial[D(x, \lambda_i)]}{\partial x_j} &= \frac{\partial[K(x)]}{\partial x_j} - \lambda_i^2 \frac{\partial[M(x)]}{\partial x_j} - \\ &- \{A\}_i^T \left( \frac{\partial[K(x)]}{\partial x_j} - \lambda_i^2 \frac{\partial[M(x)]}{\partial x_j} \right) \{A\}_i [M(x)], \end{aligned} \quad (3)$$

а производная от каждой  $i$ -й нестационарной главной координаты  $q_i(t)$  (интеграла Дюамеля)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i(t)}{\partial x_j} &= \frac{\{\bar{A}\}_i^T \cdot \left( \frac{\partial[K(x)]}{\partial x_j} - \lambda_i^2 \frac{\partial[M(x)]}{\partial x_j} \right) \cdot \{\bar{A}\}_i}{2 \cdot \lambda_i^2} \cdot (\bar{q}_i(t) - q_i(t)) - \\ &- \frac{q_i(t)}{m_i} \cdot \left( \frac{\partial\{A\}_i^T}{\partial x_j} \cdot [M(x)] \cdot \{A\}_i + \{A\}_i^T \cdot \frac{\partial[M(x)]}{\partial x_j} \cdot \{A\}_i + \right. \\ &\left. + \{A\}_i^T \cdot [M(x)] \cdot \frac{\partial\{A\}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{q}_i(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где, в свою очередь,  $\{\bar{A}\}_i = \{A\}_i / \sqrt{m_i}$  –  $i$ -я форма колебаний, нормированная по соответствующей обобщенной массе,

$$\begin{aligned} \bar{q}_i(t) &= \\ &= \frac{1}{m_i} \cdot \int_0^t \{A\}_i^T \cdot \{P\} \cdot \xi(\tau) \cdot (t - \tau) \cdot \cos(\lambda_i \cdot (t - \tau)) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{\bar{q}}_i(t) = \frac{1}{m_i \cdot \lambda_i} \cdot \int_0^t \frac{\partial\{A\}_i^T}{\partial x_j} \cdot \{P\} \cdot \xi(\tau) \cdot \sin(\lambda_i \cdot (t - \tau)) dt, \quad (6)$$

$\{P\}$  – вектор амплитудных значений внешней узловой нагрузки,  $\xi(\tau)$  – функция, отражающая характер нестационарности нагрузки, с амплитудой, равной 1.

Приведем здесь также абсолютно устойчивую для заданных параметров  $\alpha = 0,25$  и  $\delta = 0,5$  невязкую схему интегрирования матричного уравнения ди-

намики Ньюмарка и ее прямое дифференцирование по  $j$ -му параметру проектирования [8]:

$$\left. \begin{aligned}
 \{Q(t_k)\} &= \left( \frac{[M(x)]}{\alpha \cdot \Delta t^2} + [K(x)] \right)^{-1} \times \\
 &\times \left\{ \begin{aligned}
 &\left[ \frac{[M(x)]}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{Q(t_{k-1})\} + \frac{[M(x)]}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{\dot{Q}(t_{k-1})\} - \right. \\
 &\left. - [M(x)] \cdot \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \{\ddot{Q}(t_{k-1})\} + \{P\} \cdot \xi(t_k) \right] \\
 \{\dot{Q}(t_k)\} &= \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot (\{Q(t_k)\} - \{Q(t_{k-1})\}) + \\
 &+ \frac{\alpha - \delta}{\alpha} \cdot \{\dot{Q}(t_{k-1})\} + \frac{2\alpha - \delta}{2\alpha} \cdot \Delta t \cdot \{\ddot{Q}(t_{k-1})\}; \\
 \{\ddot{Q}(t_k)\} &= \frac{\{Q(t_k)\} - \{Q(t_{k-1})\}}{\alpha \cdot \Delta t^2} - \frac{\{\dot{Q}(t_{k-1})\}}{\alpha \cdot \Delta t} + \\
 &+ \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \{\ddot{Q}(t_{k-1})\}; \\
 \frac{\partial \{Q(t_k)\}}{\partial x_j} &= \left( \frac{[M(x)]}{\alpha \cdot \Delta t^2} + [K(x)] \right)^{-1} \times \\
 &\times \left\{ \begin{aligned}
 &\left( - \frac{\partial [M(x)]}{\partial x_j \cdot \alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{Q(t_k)\} + \frac{\partial [M(x)]}{\partial x_j \cdot \alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \{Q(t_{k-1})\} + \right. \\
 &+ \frac{[M(x)]}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \frac{\partial \{Q(t_{k-1})\}}{\partial x_j} + \frac{[M(x)]}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \frac{\partial \{\dot{Q}(t_{k-1})\}}{\partial x_j} + \\
 &+ \frac{\partial [M(x)]}{\partial x_j \cdot \alpha \cdot \Delta t} \cdot \{\dot{Q}(t_{k-1})\} - \\
 &\left. - \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \left( \frac{\partial [M(x)]}{\partial x_j} \cdot \{\ddot{Q}(t_{k-1})\} + [M(x)] \cdot \frac{\partial \{\ddot{Q}(t_{k-1})\}}{\partial x_j} \right) \right) \\
 \frac{\partial \{\dot{Q}(t_k)\}}{\partial x_j} &= \frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \left( \frac{\partial \{Q(t_k)\}}{\partial x_j} - \frac{\partial \{Q(t_{k-1})\}}{\partial x_j} \right) + \\
 &+ \frac{\alpha - \delta}{\alpha} \cdot \frac{\partial \{\dot{Q}(t_{k-1})\}}{\partial x_j} + \frac{2\alpha - \delta}{2\alpha} \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial \{\ddot{Q}(t_{k-1})\}}{\partial x_j}; \\
 \frac{\partial \{\ddot{Q}(t_k)\}}{\partial x_j} &= \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \left( \frac{\partial \{Q(t_k)\}}{\partial x_j} - \frac{\partial \{Q(t_{k-1})\}}{\partial x_j} \right) - \\
 &- \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \frac{\partial \{\dot{Q}(t_{k-1})\}}{\partial x_j} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \frac{\partial \{\ddot{Q}(t_{k-1})\}}{\partial x_j}.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)
 \end{aligned}
 \right.$$

## Численная модель и постановка задачи оптимизации

Numerical model and formulation of optimization problem

Удобным для исследования объектом с большим числом параметров проектирования (ПП) является конечно-элементная модель кусочно-непряматри-

ческой балки [15] с плотной сеткой и простой связью геометрических характеристик. Балка из 100 КЭ квадратного сечения (рис. 1), размер каждого – отдельный параметр проектирования, при несимметричных граничных условиях нестационарно возбуждается сосредоточенной силой в центре. В исходном призматическом проекте все сечения одинаковы.

Задача оптимального проектирования ставится так: для заданной длины  $L = \sum_{k=1}^n l_k$ , условий закрепления и нагружения ступенчато-непризматической балки отыскать такой набор размеров сечения  $\{x\}^{opt}$ , что

$$F_{цели}(\{x\}) = \rho \cdot \sum_{k=1}^n l_k \cdot x_k^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 C &= \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_0^T \int_0^L w(s, t, \{x\})^2 ds dt} = C_0 = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_0^T \int_0^L w(s, t, \{x_0\})^2 ds dt}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$x_{\min} \leq x_k \leq x_{\max} \quad \forall k \in [1, n], \quad (10)$$

где  $C$  – интегрально осредненный динамический прогиб  $w(s, t)$  за время наблюдения за системой  $T$ ;  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$  – границы технологических [5] ограничений на ПП,  $\{x_0\}$  – набор  $n$  одинаковых значений ПП исходного призматического проекта, по отношению к которому сформировано активное ограничение на параметр состояния (9).

С учетом весьма плотной дискретизации задачи по времени и пространству конструкции интегралы в (9) вычисляются как суммы без существенной погрешности. Прогибы в узлах конечно-элементной сетки выделяются из вектора обобщенных перемещений  $\{Q(t)\}$  любым удобным способом.

Вычисления производятся в программном документе системы компьютерной алгебры РТС MathCAD [17]. Матрицы жесткости и масс 4-степенного балочного КЭ на основе эрмитовых кубических полиномов заданы в виде функций от параметров проектирования, в явном виде введены и матрицы производных от них. Ансамблирование глобальных матриц модели и производных от них по ПП выполнено по автоматически генерируемой матрице индексов и также представлено в виде функций. Отыскание собственных частот, обращение матриц, программирование процедур интегрирования уравнений динамики и итерационных

алгоритмов выполнено с помощью стандартных вычислительных процедур и программных операторов MathCAD.

## Сравнение нестационарных откликов и производных от них по параметрам проектирования для разных методов

Comparison of unsteady responses and their derivatives with respect to design parameters between various methods

В качестве тестовых нестационарных нагружений балки рассматривались (рис. 2): резонансное гармоническое (*a*, динамичность  $\rightarrow \infty$ ), постоянное внезапно приложенное (*b*, динамичность – 2), импульсное одностороннее (*в*, динамичность – 2) и импульсное двустороннее (*г*, динамичность – 4), при этом

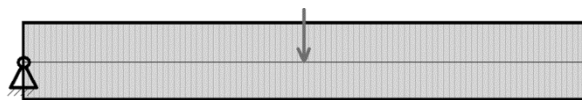


Рис. 1. Исследуемая модель балки  
Fig. 1. Beam model under study

резонансная частота, а также длительности импульсов выбирались различные.

Длительность наблюдения за колебаниями во всех случаях бралась равной 5 периодам нижней частоты, число шагов по времени – 1000. В данной работе представлены результаты для возмущающей частоты, совпадающей с нижней резонансной, а также для импульсов с полной длительностью, равной периоду нижней частоты.

Отклик в прогибах центра балки представлен на рис. 3. Как видно, для выбранных параметров

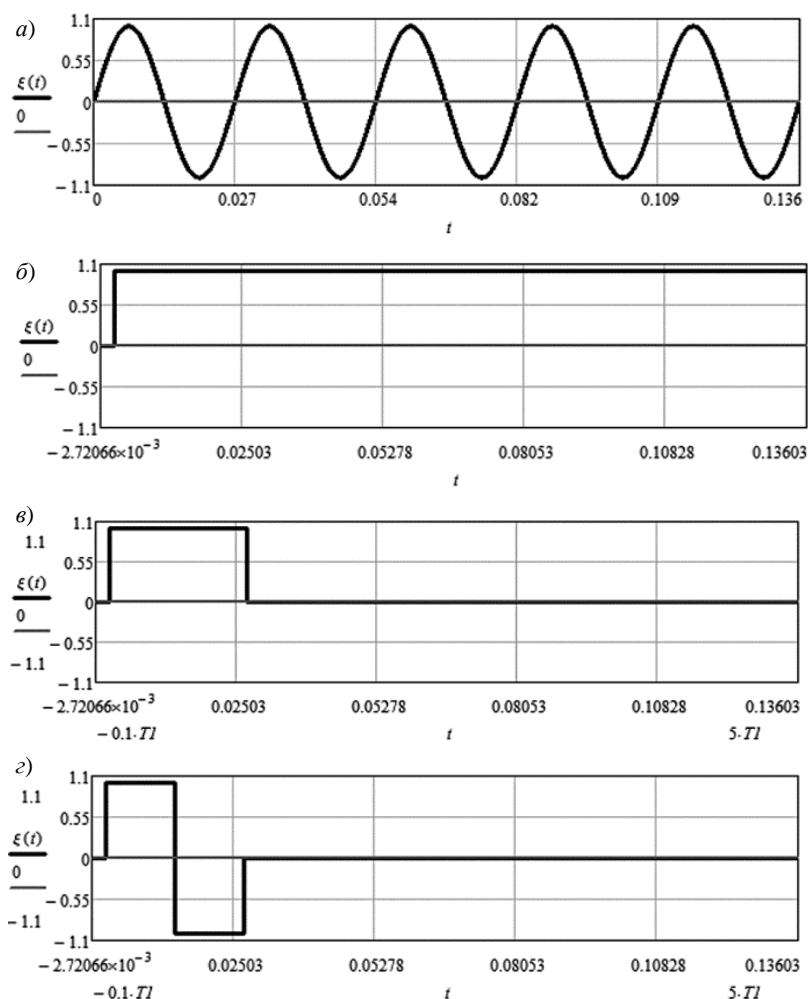
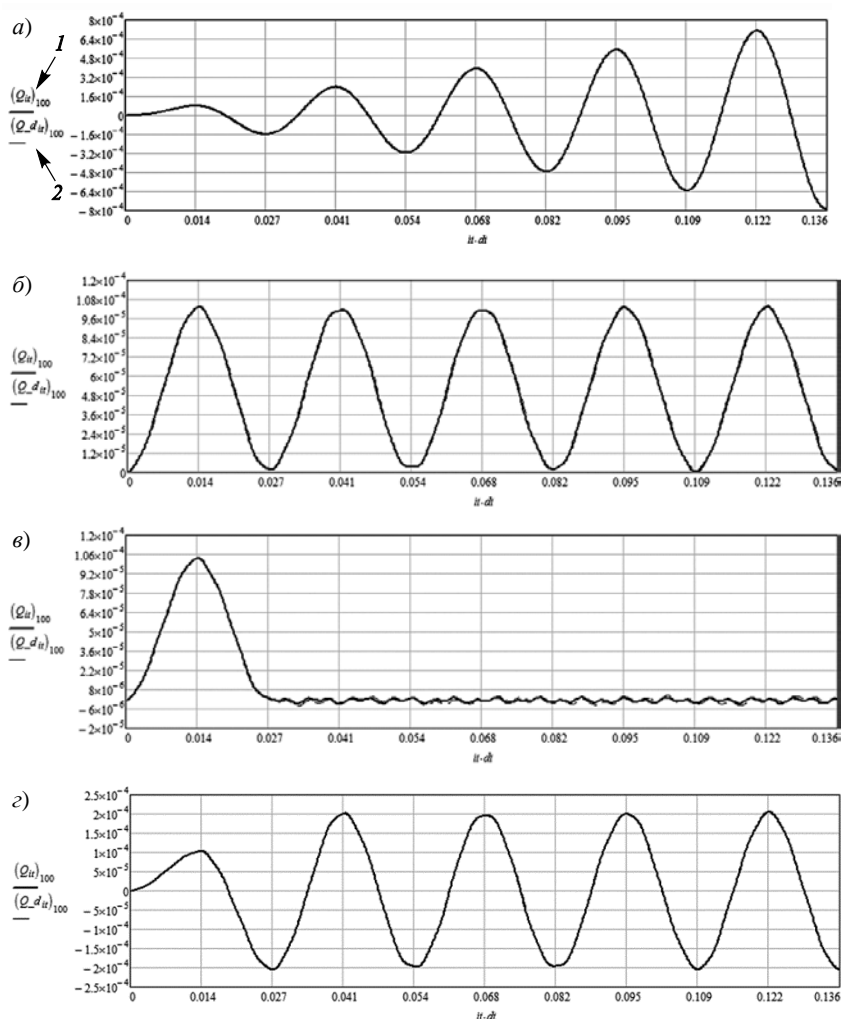


Рис. 2. Характер тестовых нестационарных нагружений:  
а) резонансное гармоническое (динамичность  $\rightarrow \infty$ );  
б) постоянное внезапно приложенное (динамичность – 2);  
в) импульсное одностороннее (динамичность – 2);  
г) импульсное двустороннее (динамичность – 4)

Fig. 2. Type of unsteady test loading:  
a) resonance harmonic loading (dynamic behavior  $\rightarrow \infty$ );  
b) permanent sudden application (dynamic behavior – 2);  
c) one-sided impulse (dynamic behavior – 2);  
d) two-sided impulse (dynamic behavior – 4)



**Рис. 3.** Прогибы центра призматической (исходной) балки: 1 – полученные методом главных координат (удержано 5 первых форм); 2 – полученные методом Ньюмарка

**Fig. 3.** Deflections of prismatic (initial) beam center: 1 – normal coordinate method (5 first modes are retained); 2 – Newmark beta-method

нагрузки и счета результаты разных методов практически совпадают.

Для выбранного шага по времени приводимые на рис. 4 (см. вклейку) производные по 50-му параметру проектирования (размеру сечения срединного элемента модели) имеют незначительные различия. Отметим резонансный характер производных, свойственный и нерезонансным воздействиям.

Результаты прямого дифференцирования разностной схемы (полуаналитический метод анализа чувствительности), таким образом, получают подтверждение с помощью аналитического способа взятия производных. Стоит при этом заметить, что число вычислительных операций в первом случае оказывается меньшим. Но для спектральных откликов аналитическое дифференцирование форм представляется в перспективе единственным средством анализа чувствительности.

## Ход и результаты решения оптимизационных задач

Procedure and solution results of optimization problems

С учетом изопериметрической постановки для исследования модельного объекта выбор неварьируемых параметров может быть произвольным. Принятый за исходный призматический проект балки с числом элементов (и ПП)  $n = 100$  имеет длину 1 м, выполнен из стали, размер квадратного сечения всех элементов – 1 см, технологический диапазон этого размера – от 1 мм до 1 дм, т.е. допускает изменение исходного значения на порядок в обе стороны. Амплитудное значение возмущающей силы для всех вариантов нестационарности – 1 Н.

Исходя из представленных на рис. 3 и 4 результатов, активными в отклике можно считать первые 2 формы колебаний балки, достаточная точность вычислений сохраняется при 40 шагах по времени на 1 период низшей частоты, т.е. при 200 шагах на весь рассматриваемый процесс (5 периодов низшей частоты исходного проекта). Снижение чисел учитываемых форм и шагов интегрирования позволяет ускорить решение оптимизационной задачи. Заметим, что изменение конфигурации балки в ходе оптимизации может вызвать появление в отклике и более высоких форм, таким образом, применение дифференцирования разностной схемы здесь предпочтительнее.

Алгоритм оптимизации состоит в заданном числе пересчетов значений ПП и множителей Лагранжа по рекуррентным соотношениям. Наиболее общие соотношения, приводимые в [15], обеспечивают устойчивый счет, в основном, в статических задачах. В настоящем случае применяем их в линеаризованном виде [5, 7, 8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^{(z)} = x_i^{(z-1)} \left[ 1 - \eta \left( \mu^{(z)} / \frac{\partial F_{\text{цели}}^{(z)}}{\partial x_i} \frac{\partial C^{(z)}}{\partial x_i} + 1 \right) \right] \forall i \in [1, n] \\ \mu^{(z)} = \frac{C^{(z)} - C_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial C^{(z)}}{\partial x_i} x_i^{(z)}}{\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial C^{(z)}}{\partial x_i} \right)^2 / \frac{\partial F_{\text{цели}}^{(z)}}{\partial x_i} \right] x_i^{(z)}} \end{array} \right. , \quad (11)$$

где  $\eta = 0,05$  – релаксационный параметр, снижающий скорость сходимости алгоритма, но повышающий его устойчивость,  $z$  – номер итерации,  $\mu^{(z)}$  – множитель Лагранжа при единственном активном ограничении (9).

Признаками сходимости и корректной работы итерационного алгоритма считаем:

- выход параметров проектирования (и, как следствие, – функции цели) на постоянные значения (стремление к 0 разницы значений на соседних итерациях);
- снижение значения функции цели;
- выход множителя Лагранжа на постоянное значение;
- стабилизацию контролируемого интегрального параметра на заданном ограничением уровне.

Рассмотрим результаты работы алгоритма (11) для введенных ранее нестационарных нагрузок с применением анализа чувствительности (1)–(6) на 20 итерациях (рис. 5, см. вклейку). Число удержи-

ваемых в отклике форм варьировалось от 2 до 5, что практически не сказалось на результате.

Как видно, для выбранного числа итераций наблюдается устойчивая сходимость. Максимальный выигрыш массы  $\Delta m$  получен для резонансного гармонического нагружения, отклик в котором мономодальный. Для внезапно приложенных и импульсных нагрузок выигрыш примерно в 3 раза меньше. Во всех случаях оптимальный проект имеет тенденцию к накоплению массы и жесткости в зонах экстремальных значений изгибающих моментов и тенденцию к снижению массы и жесткости – в зонах, где изгибающий момент близок к 0. Расположение указанных зон для разных характеров нестационарности имеет похожий, но неодинаковый вид. Наибольшая активность во всех откликах у 1-й формы колебаний продуцирует вид оптимальных по статической жесткости балок [11]. Отметим, что ограничение-равенство (9) для большинства расчетных случаев выполняется на всех итерациях.

При повышении числа итераций появляется численная неустойчивость алгоритмов с использованием (1)–(6) (например, в случае нагрузки (б)). Использование же выражений (7) дает более устойчивую сходимость. Приведем здесь некоторые результаты для такого варианта анализа чувствительности (рис. 6, см. вклейку).

Оба способа анализа чувствительности дают весьма близкие результаты в составе алгоритма оптимизации, что позволяет считать задачу построения аппарата верификации способа (7) в целом выполненной.

Подбор настроечных параметров алгоритма (размер шага по времени, число форм в отклике, значения релаксационных показателей, число итераций, форма рекуррентных соотношений) является одним из направлений дальнейшего исследования.

Изменение откликов на заданные воздействия оптимизированных балок по сравнению с исходной призматической моделью можно продемонстрировать напрямую или косвенно, сравнивая собственные частоты (рис. 7, см. вклейку) или спектры Фурье отклика.

Особенностью применения интегрального ограничения в случае гармонического воздействия является существенное относительное снижение всех низших собственных частот (более 20 % даже для первой), как видно на рис. 7а. При этом за счет уменьшения числа полных периодов за заданное время наблюдения происходит существенный рост

амплитуды. В случаях импульсного нагружения оптимизация стремится сохранить первые 2 частоты на исходном уровне.

## Заключение

### Conclusion

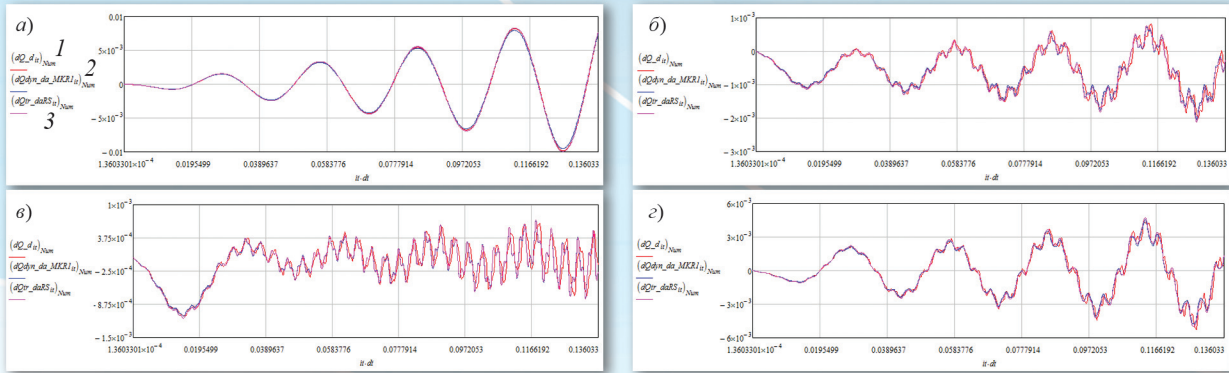
Полученный вычислительный аппарат оптимизации нестационарно колеблющихся балочных конструкций демонстрирует возможность управления динамическими свойствами на проектной стадии. Учет сопротивления (хотя бы с симметричной матрицей), влияния сдвига и иных факторов – предмет дальнейшего рассмотрения.

Методы решения экстремальных задач в сочетании с комплексными моделями на базе «аналитически чувствительных» конечных элементов (т.е. содержащих матрицы не только жесткости, масс, сопротивления, но и производных), дают, как представляется, наиболее быстрый выход на управление спектром отклика при ограниченной материалоемкости и фиксированной топологии связей сложных конструкций морских сооружений. Кроме того, они позволяют в довольно близкой перспективе осуществить наиболее сложную задачу строительной механики – современный и экономичный проектировочный расчет рациональных динамических систем при долговременных случайных нагрузках.

## Список использованной литературы

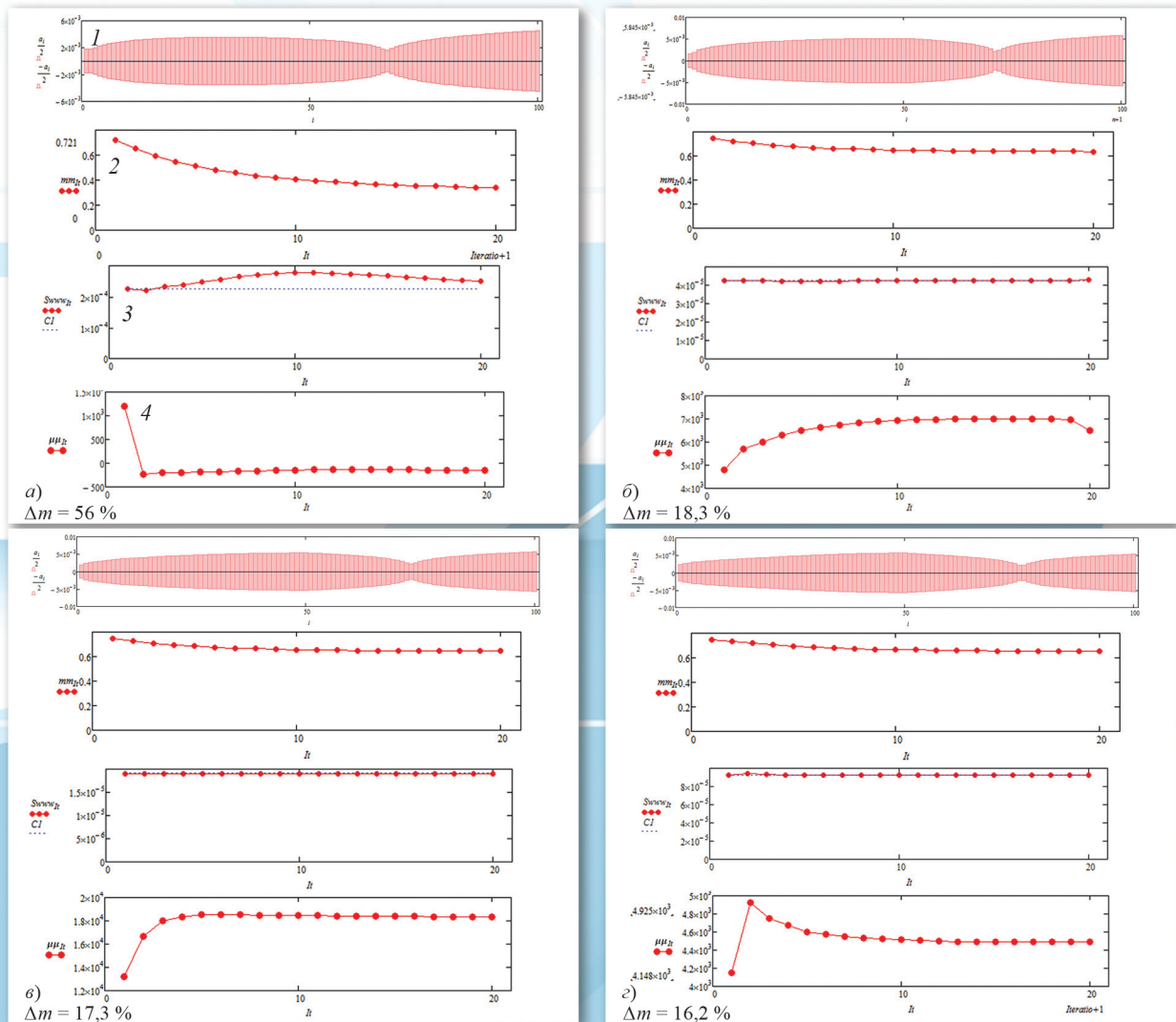
1. *Родионов А.А., Савинов Г.В.* Проектирование конструкций минимальной массы из условий обеспечения устойчивости // *Материалы по обмену опытом / НТО судостроителей им. А.Н. Крылова.* Ленинград : Судостроение, 1984. Вып. 397 : Применение численных методов в строительной механике корабля. С. 47–52.
2. *Разлетова И.Б., Родионов А.А., Упырев В.М.* Оптимизация судовых перекрытий при ограничениях на собственные частоты // *Тезисы докладов IX Дальневосточной научно-техн. конф. по повреждениям и эксплуатационной надежности судовых конструкций.* Владивосток, 1984. С. 115–118.
3. *Разлетова И.Б., Родионов А.А.* Оптимизация судовых перекрытий при заданной величине критической силы // *Устойчивость и динамика судовых конструкций.* Ленинград : ЛКИ, 1985. С. 84–90.
4. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В.* Динамика конструкций. Анализ и оптимизация. Москва : Наука, 1989. 259, [1] с.
5. *Родионов А.А.* Математические методы оптимального проектирования конструкций судового корпуса. Ленинград : Судостроение, 1990. 246, [1] с.
6. *Миронов М.Ю., Родионов А.А.* Оптимизация пластинчатых конструкций при динамическом нагружении // *Конференция по строительной механике корабля, посвященная памяти академика Ю.А. Шиманского : тезисы докладов.* Санкт-Петербург : ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2003. С. 45–47.
7. *Мальшиевский Ю.В., Миронов М.Ю., Родионов А.А.* Исследование коэффициентов чувствительности в статических и динамических оптимизационных задачах // *Тезисы докладов научно-технической конференции «Бубновские чтения».* Санкт-Петербург, 2004. С. 134–135.
8. *Миронов М.Ю., Родионов А.А.* Расчетное проектирование и оптимизация судовых конструкций, находящихся в условиях воздействия нестационарных динамических нагружений // *Тезисы докладов научно-технической конференции «Бубновские чтения».* Санкт-Петербург, 2004. С. 136–137.
9. *Миронов М.Ю., Родионов А.А.* Оптимизация настила внутреннего помещения подводной лодки, нагруженного статическими и динамическими усилиями // *Конференция по строительной механике корабля памяти профессора П.Ф. Папковича : тезисы докладов.* Санкт-Петербург : ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2005. С. 53–56.
10. *Миронов М.Ю., Родионов А.А.* Непрямые методы оптимизации в управлении свойствами конечно-элементных моделей жестких пластин // *Строительная механика и расчет сооружений.* 2007. № 6(215). С. 58–62.
11. *Миронов М.Ю., Бренс П.А., Родионов А.А.* Управление динамическими параметрами моделей перекрытий с учетом деформаций поперечного сдвига // *Конференция по строительной механике корабля памяти акад. Ю.А. Шиманского : тезисы докладов.* Санкт-Петербург : ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2008. С. 69–70.
12. *Строганова О.С., Фрумен А.И., Миронов М.Ю.* Проектирование многослойной цилиндрической оболочки подводного аппарата // *Труды Крыловского государственного научного центра.* 2013. Вып. 75(359). С. 79–88.
13. *Амосов А.А., Колтаков В.В.* Скалярно-матричное дифференцирование и его приложения к конструктивным задачам теории связи // *Проблемы передачи информации.* 1972. Т. 8, № 1. С. 3–15.
14. *Yatahawa H.* Optimum structural design for dynamic response // *New directions in optimum structural design :*





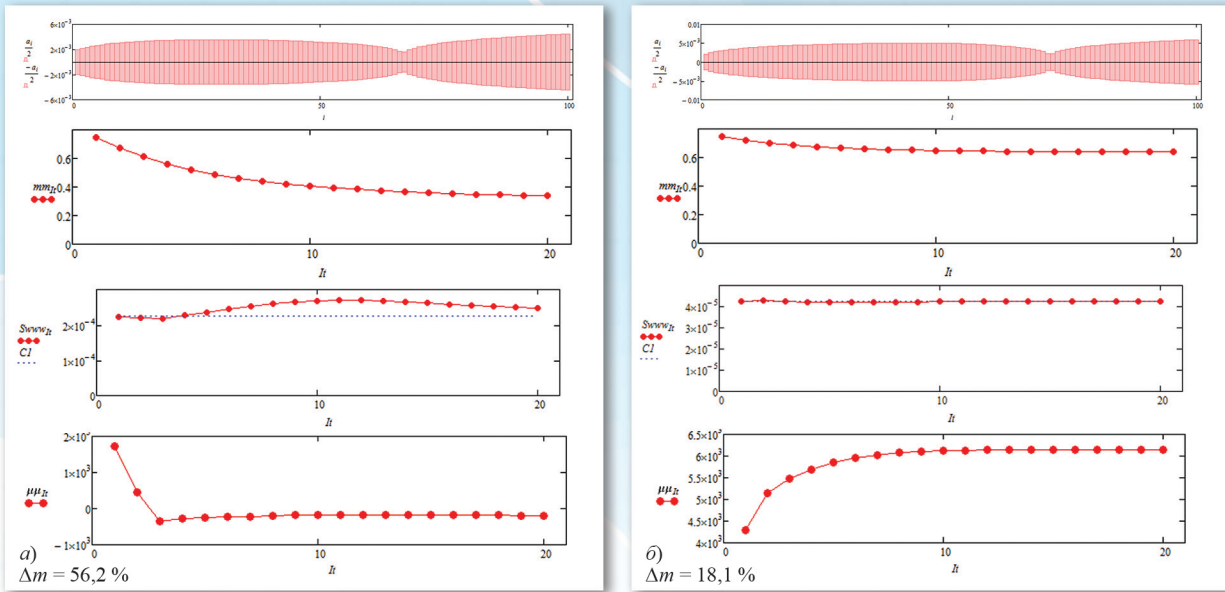
**Рис. 4.** Нестационарные производные от прогиба центра балки по размеру сечения среднего КЭ: 1 – полученные прямым дифференцированием схемы Ньюмарка; 2 – полученные конечно-разностным дифференцированием суперпозиции откликов по формам (проверка); 3 – полученные аналитическим дифференцированием суперпозиции

**Fig. 4.** Unsteady derivatives of beam center for average size cross-section of FE: 1 – direct differentiation of Newmark scheme; 2 – obtained by difference differentiation of response superposition by modes (check); 3 – obtained by analytical differentiation of superposition



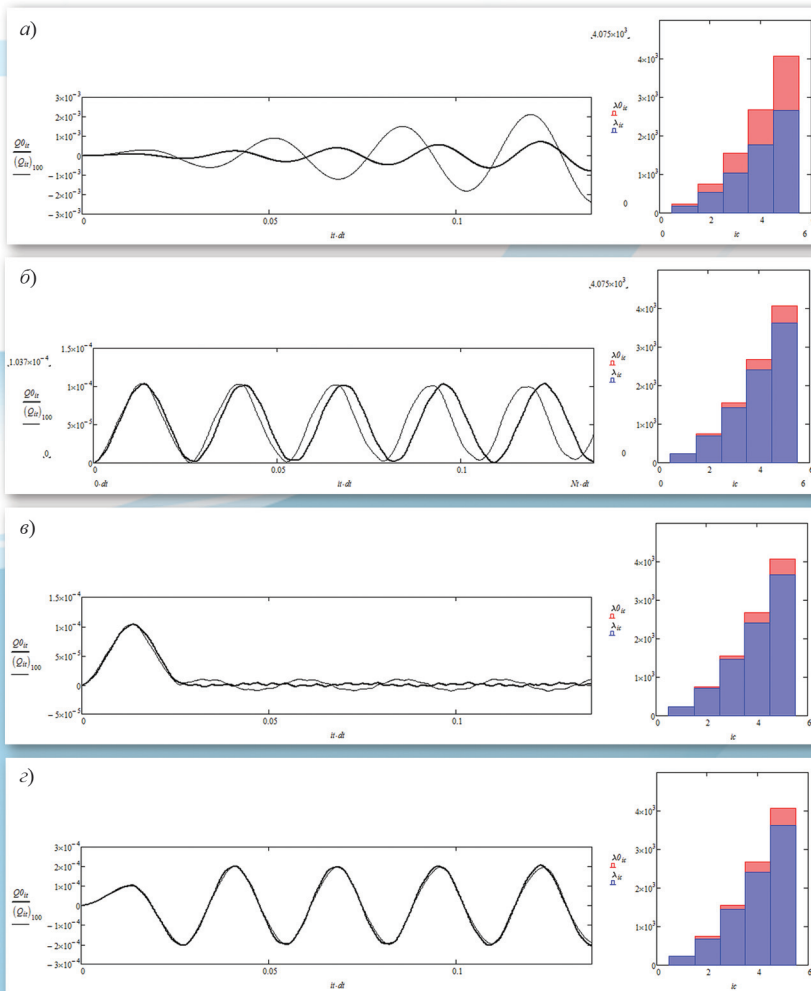
**Рис. 5.** Оптимизация оперто-заделанной балки по массе с ограничением на интегрально осредненный динамический прогиб. Метод анализа чувствительности – матричное дифференцирование суперпозиции форм (1 – вид оптимизированного проекта; 2 – изменение массы; 3 – изменение нормы прогиба; 4 – изменение множителя Лагранжа)

**Fig. 5.** Optimization of a fixed-free beam by mass constrained for integrally averaged dynamic deflection. Analysis of sensitivity method – matrix differentiation of mode superposition (1 – view of optimized project; 2 – mass change; 3 – deflection rate change; 4 – Lagrange factor change)



**Рис. 6.** Оптимизация оперто-заделанной балки по массе с ограничением на интегрально осредненный динамический прогиб. Метод анализа чувствительности – прямое формальное дифференцирование разностной схемы Ньюмарка

**Fig. 6.** Optimization of a fixed-free beam by mass constrained for integrally averaged dynamic deflection. Analysis of sensitivity method – direct formal differentiation of Newmark difference scheme



**Рис. 7.** Собственные частоты оптимизированных балок и отклики на заданное воздействие в сравнении с исходным призматическим проектом

**Fig. 7.** Natural frequencies of optimized beams and responses to give excitation in comparison with the initial prismatic project

- proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Optimum Structural Design. Chichester : Wiley, 1984. P. 249–266.
15. *Миронов М.Ю.* К анализу чувствительности нестационарных откликов конечно-элементных моделей балочных конструкций // Труды Крыловского государственного научного центра. 2020. Спец. вып. 2. С. 103–109. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-2-S-I-103-109.
  16. *Бирбраер А.Н.* Расчет конструкций на сейсмостойкость. Санкт-Петербург : Наука, 1998. 255 с.
  17. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в MathCAD 15 : учебный курс. Москва [и др.] : Питер, 2011. 399 с.
- ## References
1. *Rodionov A.A., Savinov G.V.* Design of minimum mass structures to avoid buckling condition // Experience exchange Materials / Krylov Scientific & Technical Society of Shipbuilders. Leningrad : Sudostroenie, 1984. Vol. 397 : Use of numerical methods in naval architecture. P. 47–52 (*in Russian*).
  2. *Razletova I.B., Rodionov A.A., Upyrev V.M.* Optimization of ship deck structures at natural frequency constraints // Abstracts of the IX Far Eastern Science & Engineering Conference on damage and operational reliability of ship structures. Vladivostok, 1984. P. 115–118 (*in Russian*).
  3. *Razletova I.B., Rodionov A.A.* Optimization of ship decks at a given critical force // Stability and dynamics of ship structures. Leningrad : LKI, 1985. P. 84–90 (*in Russian*).
  4. *Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Sharanyuk A.V.* Dynamics of structures. Analysis and optimization. Moscow : Nauka, 1989. 259, [1] p. (*in Russian*).
  5. *Rodionov A.A.* Mathematical methods for optimum design of ship hull structures. Leningrad : Sudostroenie, 1990. 246, [1] p. (*in Russian*).
  6. *Mironov M.Yu., Rodionov A.A.* Optimization of plate structures under dynamic loads // Structural Mechanics Conference dedicated to the memory of academician Yu.A. Shimansky. Paper abstracts. St. Petersburg : Krylov Shipbuilding Research Institute, 2003. P. 45–47 (*in Russian*).
  7. *Malyshevsky Yu.V., Mironov M.Yu., Rodionov A.A.* Investigation of sensitivity coefficients in static and dynamic optimization problems // Abstracts of papers on the Science & Technical Conference “Bubnov Readings”. St. Petersburg, 2004. P. 134–135 (*in Russian*).
  8. *Mironov M.Yu., Rodionov A.A.* Analytical design and optimization of ship structures under unsteady dynamic loading // Abstracts of papers on the Science & Technical Conference “Bubnov Readings”. St. Petersburg, 2004. P. 136–137 (*in Russian*).
  9. *Mironov M.Yu., Rodionov A.A.* Optimization of floor in an internal compartment of submarine under static and dynamic forces // Structural Mechanics Conference dedicated to the memory of professor P.F. Papkovich: abstracts of papers. St. Petersburg : Krylov Shipbuilding Research Institute, 2005. P. 53–56 (*in Russian*).
  10. *Mironov M.Yu., Rodionov A.A.* Indirect methods of optimization in management of properties of rigid plate FE models // Structural mechanics and design of constructions. 2007. No. 6(215). P. 58–62 (*in Russian*).
  11. *Mironov M.Yu., Brens P.A., Rodionov A.A.* Management of deck models’ dynamic parameters taking into account the shear strain. Structural Mechanics Conference dedicated to the memory of academician Yu.A. Shimansky. Paper abstracts. St. Petersburg : Krylov Shipbuilding Research Institute, 2008. P. 69–70 (*in Russian*).
  12. *Stroganova O.S., Frumen A.I., Mironov M.Yu.* Design of a multi-layer cylinder shell of an underwater vehicle // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2013. Vol. 75(359). P. 79–88 (*in Russian*).
  13. *Amosov A.A., Kolpakov V.V.* Scalar-matrix differentiation and its application to structural problems of communication theory // Problems of data transmission. 1972. Vol. 8, no. 1. P. 3–15 (*in Russian*).
  14. *Yamakawa H.* Optimum structural design for dynamic response // New directions in optimum structural design : proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Optimum Structural Design. Chichester : Wiley, 1984. P. 249–266.
  15. *Mironov M.Yu.* On the analysis of sensitivity of unsteady responses of FE beam structure models // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2020. Special Edition 2. P. 103–109. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-2-S-I-103-109 (*in Russian*).
  16. *Birbraer A.N.* Calculation of structure seismic stability. St. Petersburg : Nauka, 1998. 255 p. (*in Russian*).
  17. *Makarov E.G.* Engineering calculation in MathCAD 15: Education course Moscow [at al.] : Piter, 2011. 399 p. (*in Russian*).

---

### Сведения об авторе

*Миронов Михаил Юрьевич*, к.т.н., доцент кафедры строительной механики корабля ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет». Адрес: 190121, Россия, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., д. 3. E-mail: mironov31051973@mail.ru.

### **About the author**

*Mikhail Yu. Mironov*, Cand. Sci. (Eng), Associate Professor of the Department of Ship Mechanics, St. Petersburg State Marine Technical University. Address: 3, Lotsmanskaya st., St. Petersburg, Russia, post code 190121. E-mail: mironov31051973@mail.ru.

Поступила / Received: 10.02.22  
Принята в печать / Accepted: 11.05.22  
© Миронов М.Ю., 2022