

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-3-401-139-144
УДК 621.372.8+534.13

А.А. Клещёв

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

АНИЗОТРОПНЫЕ ТВЕРДЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ

Объект и цель научной работы. В статье изучается поведение анизотропных упругих тел цилиндрической формы (ортотропной оболочки и трансверсально-изотропного стержня). Цель – нахождение фазовых скоростей упругих волн в этих телах с помощью приближений тонких оболочек и строгого подхода на основе динамической теории упругости с использованием потенциалов «типа Дебая». В предыдущих исследованиях анизотропных структур использовались анизотропные среды или анизотропные полупространства.

Материалы и методы. В работе используются как приближенный метод тонких оболочек, так и строгий подход на основе динамической теории упругости и потенциалов «типа Дебая».

Основные результаты. Получены уравнения для нахождения фазовых скоростей упругих волн в анизотропных телах цилиндрической формы. Вычислены фазовые скорости продольных и изгибных волн в анизотропном цилиндрическом стержне.

Заключение. В результате проведенных исследований удалось найти соотношения для вычисления фазовых скоростей упругих волн в ортотропной оболочке и трансверсально-изотропном стержне.

Ключевые слова: анизотропия, потенциалы «типа Дебая», ортотропная оболочка, динамическая теория упругости, фазовая скорость.

Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-3-401-139-144
UDC 621.372.8+534.13

A.A. Kleshev

Saint Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

ANISOTROPIC SOLID CYLINDRICAL WAVEGUIDES

Object and purpose of research. The article studies the behavior of anisotropic elastic bodies of cylindrical shape (orthotropic shell and transversely isotropic rod). The intention is to find the phase velocities of elastic waves in these bodies using thin shell approximations and a rigorous approach based on the dynamic theory of elasticity using "Debye type" potentials. In previous studies of anisotropic structures, anisotropic media or anisotropic half-spaces were used.

Materials and methods. Both an approximate thin shell method and a rigorous approach based on the dynamic theory of elasticity and "Debye type" potentials are used in the paper.

Main results. Equations for finding the phase velocities of elastic waves in anisotropic cylindrical bodies are obtained. Phase velocities of longitudinal and bending waves in anisotropic cylindrical rod are calculated.

Conclusion. As a result of the conducted research relations for calculating the phase velocities of elastic waves in an orthotropic shell and a transversely isotropic rod were found.

Keywords: anisotropy, Debye-type potentials, orthotropic shell, dynamic theory of elasticity, phase velocity.

The author declares no conflicts of interest.

Плоский жидкий волновод с анизотропным (трансверсально-изотропным) дном подробно исследован в [1]. А в этой статье мы сосредоточимся на изучении твердых анизотропных волноводов цилиндрической формы.

Подобные изотропные цилиндрические волноводы (сплошные и оболочечные) достаточно хорошо исследованы, но в прикладных задачах часто приходится иметь дело с анизотропными цилиндрическими телами, поэтому изучение фазовых

Для цитирования: Клещёв А.А. Анизотропные твердые цилиндрические волноводы. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 3(401): 139–144.

For citations: Kleshev A.A. Anisotropic solid cylindrical waveguides. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 3(401): 139–144 (in Russian).

скоростей упругих волн в подобных структурах является актуальным.

Рассмотрим бесконечную ортотропную тонкую цилиндрическую оболочку, у которой ось Z , вдоль которой бежит упругая волна, направлена вдоль третьей оси симметрии второго порядка.

Материал, из которого изготовлена оболочка, характеризуется девятью упругими модулями: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}$. Обобщенный закон Гука для ортотропного тела записывается в форме [2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_{11}\varepsilon_r + A_{12}\varepsilon_\varphi + A_{13}\varepsilon_z; \\ \sigma_\varphi &= A_{12}\varepsilon_r + A_{22}\varepsilon_\varphi + A_{23}\varepsilon_z; \\ \sigma_z &= A_{13}\varepsilon_r + A_{23}\varepsilon_\varphi + A_{33}\varepsilon_z; \\ \tau_{\varphi z} &= A_{44}\gamma_{\varphi z}; \tau_{rz} = A_{55}\gamma_{rz}; \tau_{r\varphi} = A_{66}\gamma_{r\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{\varphi z}, \tau_{rz}, \tau_{r\varphi}$ – компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, \gamma_{\varphi z}, \gamma_{r\varphi}$ – компоненты деформации, которые, в свою очередь, равны [3]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial z}; \gamma_{rz} = \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнения динамического равновесия в круговой цилиндрической системе координат (при гармонической зависимости от времени $\exp(i\omega t)$) имеют вид [3]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) + \rho\omega^2 U_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{1}{r} 2\tau_{r\varphi} + \rho\omega^2 U_\varphi &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + \rho\omega^2 U_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A_{11} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{A_{12}}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_{12}}{r} U_r + A_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \sigma_\varphi &= A_{12} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{A_{22}}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_{22}}{r} U_r + A_{23} \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \sigma_z &= A_{13} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{A_{23}}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{A_{23}}{r} U_r + A_{33} \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \tau_{\varphi z} &= \frac{A_{44}}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + A_{44} \frac{\partial U_\varphi}{\partial z}; \tau_{rz} = A_{55} \frac{\partial U_r}{\partial z} + A_{55} \frac{\partial U_z}{\partial r}; \\ \tau_{r\varphi} &= A_{66} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{A_{66}}{r} U_\varphi + \frac{A_{66}}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Компоненты вектора смещения $\vec{U}(U_r, U_\varphi, U_z)$

в бегущей вдоль оси Z упругой волне запишем в виде следующих разложений [3]:

$$\left. \begin{aligned} U_r &= e^{ikz} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\varphi) U_m(r); \\ U_\varphi &= e^{ikz} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\varphi) V_m(r); \\ U_z &= e^{ikz} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\varphi) W_m(r), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где k – искомое волновое число упругой волны.

Подставляя (4) в (5), получим уравнения динамического равновесия в перемещениях [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{a_1}{r} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi \partial r} + a_2 \frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial r} + \frac{a_3}{r} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi \partial r} - \frac{a_3}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \\ + \frac{a_3}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \varphi^2} + a_4 \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + a_4 \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{a_2}{r} \frac{\partial U_z}{\partial z} - \\ - \frac{a_5}{r^2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{a_5}{r^2} U_r - \frac{a_6}{r} \frac{\partial U_z}{\partial z} + a_7 U_r = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a_1 = \frac{A_{12}}{A_{11}}; a_2 = \frac{A_{13}}{A_{11}}; a_3 = \frac{A_{66}}{A_{11}}; a_4 = \frac{A_{55}}{A_{11}}; a_5 = \frac{A_{22}}{A_{11}}; \\ a_6 = \frac{A_{23}}{A_{11}}; a_7 = \frac{\rho\omega^2}{A_{11}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \varphi \partial r} + \frac{a_8}{r} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{a_9}{r} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{a_9}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{a_{10}}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial \varphi} + \frac{a_{11}}{r} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \varphi \partial z} + a_{11} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z^2} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + a_{12} U_\varphi = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } a_8 = \frac{A_{12}}{A_{66}}; a_9 = \frac{A_{22}}{A_{66}}; a_{10} = \frac{A_{23}}{A_{66}}; a_{11} = \frac{A_{44}}{A_{66}}; a_{12} = \frac{\rho\omega^2}{A_{66}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{a_{13}}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \varphi^2} + \frac{a_{13}}{r} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \\ + a_{14} \frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} + a_{16} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{a_{15}}{r} \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \\ + \frac{a_{15}}{r} \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + a_{17} U_z = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } a_{13} = \frac{A_{44}}{A_{55}}; a_{14} = \frac{A_{13}}{A_{55}}; a_{15} = \frac{A_{23}}{A_{55}}; a_{16} = \frac{A_{33}}{A_{55}}; a_{17} = \frac{\rho\omega^2}{A_{55}}.$$

Если теперь компоненты вектора смещения \bar{U} (U_r, U_φ, U_z) заменить их разложениями (5) и подставить (5) в (6)–(8), то для радиальных функций $U_m(r), V_m(r), W_m(r)$ получим следующие уравнения [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_m}{\partial r^2} + \frac{m(a_1 + a_3)}{r} \frac{\partial V_m}{\partial r} + (a_2 + a_4) i k \frac{\partial W_m}{\partial r} - \\ & - \frac{m(a_3 + a_5)}{r^2} V_m - \frac{a_3}{r^2} m^2 U_m - a_4 k^2 U_m + \frac{1}{r} \frac{\partial U_m}{\partial r} + \\ & + \frac{(a_2 - a_6)}{r} i k W_m + \left(a_7 - \frac{a_5}{r^2} \right) U_m = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + \frac{m(1 + a_8)}{r} \frac{\partial U_m}{\partial r} - \frac{m^2 a_9}{r} V_m - \frac{m a_9}{r} U_m + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial V_m}{\partial r} - \frac{m(a_{10} + a_{11})}{r} i k W_m - a_{11} k^2 V_m + \\ & + \left(a_{12} - \frac{1}{r^2} \right) V_m - \frac{m}{r^2} U_m = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (1 + a_{14}) i k \frac{\partial U_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 W_m}{\partial r^2} - \frac{m^2 a_{13}}{r^2} W_m + \\ & + \frac{m i k}{r} (a_{13} + a_{15}) V_m - k^2 a_{16} W_m - \\ & - i k \frac{(1 + a_{15})}{r} U_m + \frac{1}{r} \frac{\partial W_m}{\partial r} + a_{17} W_m = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

К уравнениям (9)–(11) добавляются граничные условия об отсутствии напряжений $\sigma_r, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}$, на внешней ($r = a$) и внутренней ($r = b$) поверхностях оболочки [3]:

$$\frac{\partial U_m}{\partial r} + \frac{a_1}{r} m V_m + \frac{a_1}{r} U_m + a_2 i k W_m \Big|_{r=a} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} - \frac{1}{r} V_m - \frac{m}{r} U_m \Big|_{r=a} = 0; \quad (13)$$

$$i k U_m + \frac{\partial W_m}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0. \quad (14)$$

Для тонких оболочек целесообразно использовать разложения по степеням $\xi = z/R_0$, где $R_0 = (a + b)/2$ – средний радиус, а $z = r - R_0$ – координата, отсчитываемая от средней поверхности [2–4]:

$$\left. \begin{aligned} U_m(r) &= \sum_{n=0}^{N_1} x_n \xi^n; \\ V_m(r) &= \sum_{n=0}^{N_1} y_n \xi^n; \\ W_m(r) &= \sum_{n=0}^{N_1} z_n \xi^n. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Разложения (15) подставим в граничные условия (12)–(14), в результате получим 6 уравнений относительно $3(N_1 + 1)$ неизвестных коэффициентов x_n, y_n, z_n [3]:

$$\begin{aligned} & R_0^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} x_n n (\xi_1)^{n-1} + a_1 m \left(R_0 + \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} y_n n (\xi_1)^n + \\ & + a_1 \left(R_0 + \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} x_n n (\xi_1)^n + a_2 i k \sum_{n=0}^{N_1} z_n n (\xi_1)^n = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\xi_1 = \frac{a - R_0}{R_0}; h = a - b$;

$$\begin{aligned} & R_0^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} x_n n (-\xi_1)^{n-1} + a_1 m \left(R_0 - \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} y_n n (-\xi_1)^n + \\ & + a_1 \left(R_0 - \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} x_n n (-\xi_1)^n + a_2 i k \sum_{n=0}^{N_1} z_n n (-\xi_1)^n = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & R_0^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} y_n n (\xi_1)^{n-1} - \left(R_0 + \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} y_n (\xi_1)^n - \\ & - m \left(R_0 + \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} x_n (\xi_1)^n = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & R_0^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} y_n n (-\xi_1)^{n-1} - \left(R_0 - \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} y_n (-\xi_1)^n - \\ & - m \left(R_0 - \frac{h}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} x_n (-\xi_1)^n = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$i k \sum_{n=0}^{N_1} x_n n (\xi_1)^n + R_0^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} z_n n (\xi_1)^{n-1} = 0, \quad (20)$$

$$i k \sum_{n=0}^{N_1} x_n n (-\xi_1)^n + R_0^{-1} \sum_{n=0}^{N_1} z_n n (-\xi_1)^{n-1} = 0. \quad (21)$$

Остальные уравнения можно получить, подставив разложения (15) в уравнения (9)–(11) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ [3]:

$$\begin{aligned} & x_{n+2} (n+2)(n+1) + x_{n+1} (n+1)(2n+1) + \\ & + x_n \left[n^2 - m^2 a_3 - a_5 + R_0^2 (a_7 - k^2 a_4) \right] + \\ & + x_{n-1} 2R_0^2 (a_7 - k^2 a_4) + x_{n-2} R_0^2 (a_7 - k^2 a_4) + \\ & + y_{n+1} (n+1) m (a_1 + a_3) + y_n m \left[n(a_1 + a_3) - a_3 - a_5 \right] + \\ & + z_{n+1} i k (a_2 + a_4) R_0 (n+1) + \\ & + z_n R_0 i k \left[2n(a_2 + a_4) + a_2 - a_6 \right] + \\ & + z_{n-1} R_0 i k \left[(n-1)(a_2 + a_4) + a_2 - a_6 \right] = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & -x_{n+1}m(1+a_8)(n+1) - x_n m [n(1+a_8) + R_0 a_9 + 1] - \\
 & -x_{n-1} R_0 m a_9 + y_{n+2}(n+2)(n+1) + y_{n+1}(2n+1)(n+1) + \\
 & + y_n [n^2 - R_0 m^2 a_9 - 1 + R_0^2 (a_{12} - k^2 a_{11})] + \\
 & + y_{n-1} R_0 (2R_0 a_{12} - m^2 a_9 - 2R_0 a_{11} k^2) + \\
 & + y_{n-2} R_0^2 (a_{12} - a_{11} k^2) - z_n R_0 i k m (a_{10} + a_{11}) - \\
 & - z_{n-1} R_0 i k m (a_{10} + a_{11}) = 0; \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_{n+1} i k (1+a_{14}) R_0 (n+1) + x_n i k R_0 [2n(1+a_{14}) + 1 + a_{15}] + \\
 & + x_{n-1} i k R_0 [(n-1)(1+a_{14}) + 1 + a_{15}] + y_n i k m R_0 (a_{15} + a_{13}) + \\
 & + y_{n-1} i k m R_0 (a_{15} + a_{13}) + z_{n+2}(n+1)(n+2) + \\
 & + z_{n+1}(n+1)(2n+1) + z_n [n^2 - m^2 a_{13} + R_0^2 (a_{17} - k^2 a_{16})] + \\
 & + z_{n-1} 2R_0^2 (a_{17} - k^2 a_{16}) + z_{n-2} R_0^2 (a_{17} - k^2 a_{16}) = 0. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Необходимо использовать $3(N_1 + 1) - 6$ уравнений (22)–(24), при этом для $n = 0$ и $n = 1$ коэффициенты с отрицательными индексами следует считать равными нулю. Тогда совместно с уравнениями (16)–(21) образуется однородная система $3(N_1 + 1)$ уравнений относительно коэффициентов x_n , y_n , z_n . Приравнявая определитель (порядка $3N_1 + 3$) этой системы к нулю, что обеспечивает ее нетривиальное решение, и раскрывая его, мы получим характеристическое уравнение для отыскания волновых чисел k упругих волн моды m в ортотропной цилиндрической оболочке.

Фазовые скорости упругих волн в трансверсально-изотропном упругом стержне изучены в работе [5]. Автор использовал представление вектора смещения \vec{u} , предложенное еще В.Т. Бухвальдом в [6] при изучении волн Рэлея в трансверсально-изотропной полубезграничной среде.

Это представление отличается от традиционно-го появлением дополнительного слагаемого:

$$\vec{U} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{A} + \text{grad } \Psi, \tag{25}$$

при этом $\text{grad } \Phi$ имеет компоненты только на r и φ , а $\text{grad } \Psi$ – только на z , векторный потенциал \vec{A} имеет только одну отличную от нуля компоненту A_z : $\vec{A}(0, 0, A_z)$.

С учетом сказанного компоненты вектора смещения \vec{U} принимают вид в круговой цилиндрической системе координат [5]:

$$U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}; \tag{26}$$

$$U_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \tag{27}$$

$$U_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{28}$$

Тогда уравнения динамического равновесия принимают вид [5]:

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + A_{44} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \\
 & + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \rho_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}; \tag{29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{13} + A_{44}) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + \\
 & + A_{44} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right) + A_{33} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \rho_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \tag{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} (A_{11} - A_{12}) \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} \right) + \\
 & + A_{44} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \rho_1 \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}; \tag{31}
 \end{aligned}$$

где ρ_1 – плотность материала стержня.

Уравнение (31) для A_z отделилось, а уравнения (29) и (30), содержащие потенциалы Φ и Ψ , оказались связанными. В окончательном виде разложения для потенциалов Φ , Ψ и A_z по цилиндрическим функциям (при гармонической зависимости от времени) принимают вид [5]:

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [B_m J_m(\beta_1 r) + q_2 C_m J_m(\beta_2 r)] \cos(m\varphi) \times \right. \\
 \left. \times \exp[i(kz - \omega t)] \right\}; \tag{32}$$

$$\Psi = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ [q_1 B_m J_m(\beta_1 r) + C_m J_m(\beta_2 r)] \cos(m\varphi) \times \right. \\
 \left. \times \exp[i(kz - \omega t)] \right\}; \tag{33}$$

$$A_z = \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_m(\gamma r) \sin m\theta \exp[i(kz - \omega t)], \tag{34}$$

где k – волновое число упругой волны в стержне; B_m , C_m и D_m – неизвестные коэффициенты разложений.

$$q_1 = - \frac{A_{11} \beta_1^2 + (A_{44} k^2 - \rho_1 \omega^2)}{(A_{13} + A_{44}) k^2};$$

$$q_2 = - \frac{(A_{13} + A_{44}) k^2}{A_{11} \beta_2^2 + (A_{44} k^2 - \rho_1 \omega^2)};$$

$$\gamma^2 = \frac{2(\rho_1 \omega^2 - A_{44} k^2)}{A_{11} - A_{12}};$$

$$\beta_1^2 = (E - \Delta) / (2 A_{11} A_{44});$$

$$\beta_2^2 = (E + \Delta) / (2 A_{11} A_{44});$$

$$\Delta = \sqrt{E^2 - 4 A_{11} A_{44} F};$$

$$F = (\rho_1 \omega^2 - A_{44} k^2)(\rho_1 \omega^2 - A_{33} k^2);$$

$$E = (A_{13} + A_{44})^2 k^2 + A_{11}(\rho_1 \omega^2 - A_{33} k^2) + A_{44}(\rho_1 \omega^2 - A_{44} k^2).$$

Фазовые скорости продольных и изгибных волн представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Эти значения пронормированы скоростью

$$c_b = \sqrt{E_a / \rho_1},$$

где $E_a = A_{33} - 2 A_{13}^2 / (A_{11} - A_{12})$.

Из последних по времени исследований упругих волн следует отметить работы [7, 8]. Автор статьи [7] рассмотрел напряженно-деформированное состояние упругой неограниченной пластины в процессе распространения фундаментальной моды симметричной волны Лэмба. Авторы работы [8] построили математическую модель динамики геометрически нелинейных (гибких) микрополярных упругих тонких пластин в декартовых и криволинейных координатах.

В результате выполненных исследований, описанных в статье, удалось получить соотношения для вычисления фазовых скоростей упругих волн в ортотропной цилиндрической оболочке и трансверсально-цилиндрическом стержне. В последнем случае были вычислены фазовые скорости продольных и изгибных волн.

Список использованной литературы

1. Клещев А.А. Плоский волновод с анизотропным упругим дном // Акустика океана : доклады XVII школы-семинара им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенной с XXXIII сессией Рос. акустического о-ва. Москва : Ин-т океанологии им. Ширшова, 2020. С. 60–65.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1977. 415 с.
3. Клещев А.А. О фазовых скоростях упругих волн в тонкой ортотропной цилиндрической оболочке // Сборник трудов XI сессии Рос. акустического о-ва. Москва : ГЕОС, 2001. Т. 1. С. 241–244.
4. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Ленинград : Судостроение, 1989. 301 с.

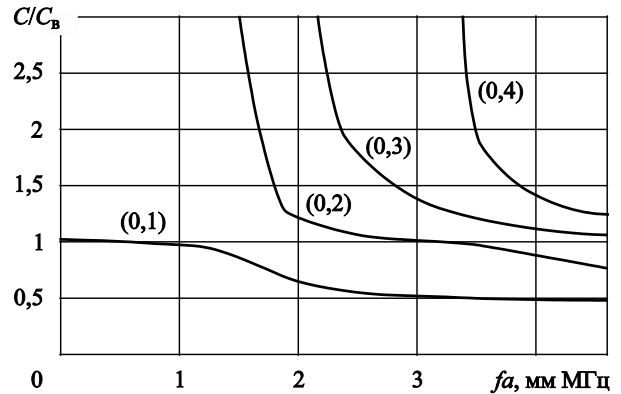


Рис. 1. Фазовые скорости продольных волн в трансверсально-изотропном стержне

Fig. 1. Phase velocities of longitudinal waves in a transversely isotropic rod

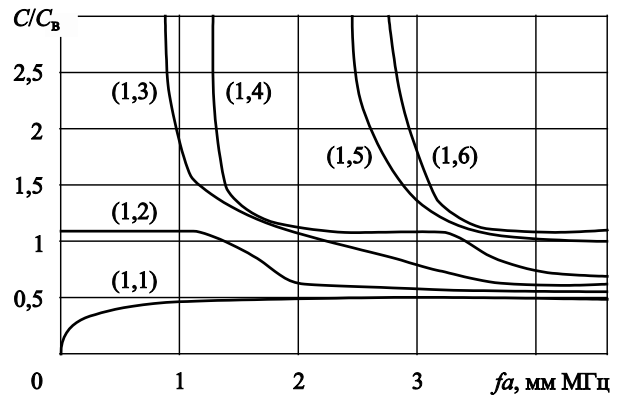


Рис. 2. Фазовые скорости изгибных волн в трансверсально-изотропном стержне

Fig. 2. Phase velocities of bending waves in a transversely isotropic rod

5. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid // Journal of the Acoustical Society of America. 2001. Vol. 109, № 3. P. 886–890. DOI: 10.1121/1.1348299.
6. Buchwald V.T. Rayleigh waves in transversely isotropic media // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1961. Vol. 14, No. 3. P. 293–318. DOI: 10.1093/qjmam/14.3.293.
7. Мокряков В.В. Напряжения в симметричной волне Лэмба среднего диапазона. Исследование внутренней волны // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 2. С. 119–128. DOI: 10.31857/S032079192202006X.
8. Саркисян А.А., Саркисян С.О. Собственные колебания микрополярных тонких пластин в декартовых и криволинейных координатах // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 2. С. 139–151. DOI 10.31857/S0320791922020083.

References

1. *Kleshchev A.A.* A planar waveguide with an anisotropic elastic bottom // *Ocean Acoustics : reports of the XVII school-seminar of Academician L.M. Brekhovskikh, combined with the XXXIII session of the Russian Acoustic Institute.* Moscow : Shirshov Institute of Oceanology, 2020. P. 60–65 (*in Russian*).
2. *Lehnitsky S.G.* Theory of elasticity of an anisotropic body. 2nd edition, updated and revised. Moscow : Nauka, 1977. 415 p. (*in Russian*).
3. *Kleshchev A.A.* On phase velocities of elastic waves in a thin orthotropic cylindrical shell // *Transactions of the XI session of the Russian Acoustic Society.* Moscow : GEOS, 2001. Vol. 1. P. 241–244 (*in Russian*).
4. *Shenderov E.L.* Radiation and sound scattering. Leningrad : Sudostroenie, 1989. 301 p. (*in Russian*).
5. *Ahmad F.* Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid // *Journal of the Acoustical Society of America.* 2001. Vol. 109, No. 3. P. 886–890. DOI: 10.1121/1.1348299.
6. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics.* 1961. Vol. 14, No. 3. P. 293–318. DOI: 10.1093/qjmam/14.3.293.
7. *Mokryakov V.V.* Stresses in the symmetric Lamb wave of the middle wavelength range. Investigation of the internal wave // *Acoustic Journal.* 2022. Vol. 68, No. 2. P. 119–128. DOI: 10.31857/S032079192202006X (*in Russian*).
8. *Sarkisyan A.A., Sarkisyan S.O.* Natural oscillations of micropolar thin plates in Cartesian and curvilinear coordinates // *Acoustic Journal.* 2022. Vol. 68, No. 2. P. 139–151. DOI 10.31857/S0320791922020083 (*in Russian*).

Сведения об авторе

Клещев Александр Александрович, д.ф.-м.н., профессор Санкт-Петербургского государственного морского технического университета. Адрес: 190121, Россия, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., д. 3. Тел.: +7 (812) 783-15-46. E-mail: alexalex-2@yandex.ru.

About the author

Alexander A. Kleshev, Dr. Sci. (Phys.&Math.), Prof., St. Petersburg State Marine Technical University. Address: 3, Lotsmanskaya st., St. Petersburg, Russia, post code 190121. Tel.: +7 (812) 783-15-46. E-mail: alexalex-2@yandex.ru.

Поступила / Received: 23.05.22
Принята в печать / Accepted: 27.06.22
© Клещев А.А., 2022