

УДК 532.527  
EDN: EQYREX

А.Ю. Яковлев, З.Х. Киав

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВРАЧИВАНИЯ ВИХРЕВЫХ ПЕЛЕН ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

**Объект и цель научной работы.** Объект исследования – форма вихревых пелен за крылом, движущимся в воздушной или водной среде, в зависимости от его расположения вблизи границы раздела сред. Целью является выявление основных закономерностей изменения формы вихревых пелен в зависимости от расположения крыла относительно границы раздела сред.

**Материалы и методы.** Для моделирования перемещения вихревых пелен применяется разработанный ранее метод расчета формы поперечных сечений вихревых пелен в различные моменты времени в безграничном пространстве. В данной работе метод модифицирован на основе функции Грина для полупространства для учета границы раздела сред.

**Основные результаты.** Обнаружено существенное различие в поведении вихревых пелен при движении крыла над или под границей раздела сред. При движении крыла над границей раздела вихревые жгуты движутся в разные стороны вдоль этой границы, а при движении под границей раздела вихревые жгуты сначала движутся навстречу друг другу, а потом начинают быстро опускаться. Получены оценки скорости перемещения вихрей в зависимости от расстояния до границы раздела сред.

**Заключение.** Выявленные закономерности поведения вихревых пелен могут применяться при проектировании систем крыльев экранопланов и судов на подводных крыльях.

**Ключевые слова:** вихревые пелены, крыло, сворачивание, граница раздела, плоскость Треффта, метод вихревых особенностей.

*Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

UDC 532.527  
EDN: EQYREX

A.Yu. Yakovlev, Z.Kh. Kiav

St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

## NUMERICAL MODELING OF VORTEX SHEET ROLLUP NEAR INTERFACE

**Object and purpose of research.** The study object is the shape of vortex sheets in wake of a foil moving in air or in water depending on the location with respect to the interface. The purpose is to identify the main relationships of vortex sheet shapes depending on the foil location with respect to the interface.

**Materials and methods.** The vortex sheet was modeled using the earlier developed method for calculation of vortex sheet cross sections in different time instants in unbound space. The method is modified in this work based on the Green function for half-space to take into account the interface boundaries.

**Main results.** It is found that behavior of vortex sheets is considerably different when the foil is moving above or under the interface. When the foil is above the interface, the vortex cores first move towards each other and then start to rapidly go downwards. Vortex velocities are estimated versus distance from the interface.

**Conclusion.** The relationships identified in the behavior of vortex sheets can be useful in wing-in-ground effect and hydrofoil system design.

**Keywords:** vortex sheets, foil, rollup, interface, Trefftz plane, vortical singularity method.

*The authors declare no conflicts of interest.*

*Для цитирования:* Яковлев А.Ю., Киав З.Х. Численное моделирование сворачивания вихревых пелен вблизи границы раздела сред. Труды Крыловского государственного научного центра. 2026; 1(415): 56–63.

*For citations:* Yakovlev A.Yu., Kiav Z.Kh. Numerical modeling of vortex sheet rollup near interface. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2026; 1(415): 56–63 (in Russian).

## 1. Введение

### 1. Introduction

Свободные вихревые пелены формируются практически за любым крылом или телом, работающим как крыло. Теоретическое обоснование этого эффекта следует из закона сохранения вихревых линий, доказанного в классической теории вихревых течений [1].

В задачах судостроения встречается много примеров использования крыльев. К их числу относятся лопасти гребных винтов и осевых насосов, рули, паруса, подводные крылья СПК и воздушные крылья экранопланов. За каждым из этих крыльев формируется свободная вихревая пелена. Таким образом, при движении судна вокруг него может формироваться целая система свободных вихрей, которые взаимодействуют друг с другом и с элементами корпуса. При численном моделировании движения судна и работы его устройств необходимо учитывать эффекты, обусловленные этим взаимодействием.

В работе [2] представлен метод расчета изменения формы свободных вихревых пелен (сворачивания) за крылом эллиптической формы в безграничной среде. Однако для судостроения чаще бывают актуальны задачи, в которых свободная вихревая пелена распространяется вблизи границы раздела сред. Наиболее характерны такие условия для работы крыла экраноплана и систем крыльев СПК. Интересно, что эти задачи не являются идентичными даже при выборе одинаковой формы крыльев. Дело в том, что при движении экраноплана свободная поверхность располагается под крылом, т.е. со стороны нагнетающей поверхности крыла. А в случае СПК свободная поверхность находится над крылом – со стороны его засасывающей поверхности. Процессы сворачивания вихревых пелен в этих случаях происходят по-разному, что необходимо учитывать при выполнении расчетов.

С точки зрения проектирования систем крыльев СПК или экраноплана целесообразно вообще избежать взаимодействия вихревых систем с соседними крыльями. На основе проведенных расчетов можно оценить наиболее безопасные места расположения крыльев. Если избежать взаимодействия не удастся, математическая модель сворачивания вихревых пелен позволяет учесть их влияние на аэродинамические характеристики крыльев.

Таким образом, целью данной работы является выяснение особенностей сворачивания вихревых пелен, распространяющихся в непосредственной

близости от границы раздела сред. Исследования проводятся для двух случаев распространения вихревых пелен: над и под границей раздела. Для выполнения этих исследований необходимо модифицировать разработанный ранее метод расчета сворачивания свободной вихревой пелены [2], чтобы он позволял учитывать наличие границы раздела сред в непосредственной близости от вихревой пелены.

Исследования сворачивания вихревых пелен за крылом в безграничном пространстве рассмотрены и проанализированы в предшествующей работе [2]. Значительно меньшее число работ посвящено исследованию характеристик крыльев и свободных вихревых пелен за ними при наличии границы раздела сред, в случае т.н. в зарубежной литературе wing-in-ground effect. Следует отметить, что значительная роль в исследовании этого эффекта принадлежит отечественным специалистам [3, 4]. Из зарубежных работ назовем [5], в которой с помощью дискретных вихрей исследовались нестационарные эффекты в вихревой пелене за крылом над экраном, а также работу [6], посвященную вихрям за крылом самолета вблизи поверхности земли.

## 2. Постановка задачи

### 2. Statement of problem

Рассмотрим свободную вихревую пелену, формируемую за крылом (рис. 1). Крыло считается движущимся над плоской границей раздела сред (экраном) на высоте  $h$ . В данной работе распределение интенсивности вихрей в сходящей с крыла пелене считается заданным, и задача определения интенсивности вихревой пелены не ставится. Реше-

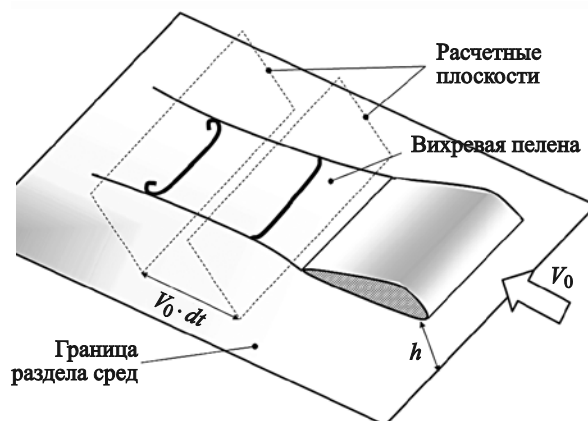


Рис. 1. Вихревая пелена и расчетные плоскости

Fig. 1. Vortex sheets and calculation planes

ние этой задачи подробно изложено в многочисленных работах, например [7, 8].

В рамках упрощенной постановки задачи считается, что скорость потока  $V_0$  настолько велика, что процессы деформации вихревой пелены становятся заметны только на участке вихревой пелены большой протяженности. В этом случае при анализе движения вихревой пелены можно считать ее форму и интенсивность постоянными вдоль направления скорости потока. Тогда с достаточной степенью точности можно моделировать взаимодействие вихрей как плоских гидродинамических особенностей, образованных поперечными сечениями потока. Получаемые плоские решения в различные моменты времени будут соответствовать различным сечениям вихревой пелены на расстоянии  $V_0 \cdot dt$  от начальной точки (рис. 1).

Данный подход к моделированию поведения вихревых пелен в зарубежной литературе часто называют расчетом в плоскости Треффта (Trefftz plane). Ранее в работе [2] был представлен метод расчета динамики вихревой пелены в плоскости Треффта в безграничном потоке, Основной особенностью предложенного метода является способ интегрирования уравнения переноса вихрей. Обычно для этого используется либо метод Эйлера [9–11], который требует меньшего числа расчетных операций, но имеет большие погрешности, либо методы типа Рунге – Кутты [12–14]. В отличие от этих способов предлагается использовать альтернативный прием [15], состоящий в привлечении в процессе интегрирования дополнительных производных скоростей.

### 3. Основные положения расчетного метода

#### 3. Main calculation procedures

##### 3.1. Теоретические положения метода

Для моделирования движения вихревой пелены в плоскости поперечного сечения будем использовать замену непрерывной вихревой поверхности системой дискретных вихревых особенностей. Эти особенности могут иметь различную интенсивность и расстояние друг от друга. Такая схема дискретизации, в отличие от непрерывного распределения вихрей по пелене [9], также имеет целями упрощение расчетной схемы и экономию вычислительных ресурсов.

Рассмотрим движение жидких частиц в плоском потоке сплошной среды. Если известно поле

скорости и координаты  $i$ -й частицы  $\vec{r}_i(t)$  в момент времени  $t$ , то координаты этой частицы в момент времени  $t + \Delta t$  могут быть определены по следующей формуле, которая представляет собой первые 3 слагаемых разложения в ряд Тейлора:

$$\vec{r}_i(t + \Delta t) = \vec{r}_i(t) + \vec{v}(\vec{r}_i(t), t) \cdot \Delta t + \vec{w}(\vec{r}_i(t), t) \cdot \frac{\Delta t^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь  $v$  – скорость как функция координат пространства и времени,  $w$  – ускорение как функция координат пространства и времени.

Будем полагать, что рассматриваемые частицы заключают в себе дискретные вихри, интенсивность которых для  $i$ -й частицы обозначим  $\Gamma_i$ . Тогда, пользуясь известными соотношениями для скорости, создаваемой вихревой особенностью [1], можем записать выражение для скорости, вызванной  $i$ -й частицей:

$$\begin{aligned} v_{xi}(\vec{r}, t) &= -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y - y_i}{|\vec{r}|^2}; \\ v_{yi}(\vec{r}, t) &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x - x_i}{|\vec{r}|^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $|\vec{r}| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$  – расстояние между точкой  $(x, y)$ , в которой определяется скорость и место расположения  $i$ -й вихревой особенности.

При расчете по формулам (2) скорость стремится к бесконечности в точке расположения вихря. В действительности такого не наблюдается, поскольку реальные вихревые структуры имеют конечные размеры. Поэтому при выполнении расчетов будем использовать вместо выражений (2) математическую модель, учитывающую конечные размеры вихрей, предложенную Красни [12]. В этом случае скорости в декартовой системе координат будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{xi}(\vec{r}, t) &= -\frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y - y_i}{|\vec{r}|^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}; \\ v_{yi}(\vec{r}, t) &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x - x_i}{|\vec{r}|^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\delta$  – диаметр вихревых структур.

В выражение (1) помимо скоростей были включены слагаемые второго порядка малости, определяемые ускорением частиц жидкости  $w$ . Они могут быть выражены через скорости деформации удли-

нения и сдвига [1], создаваемые в потоке за счет влияния вихревой особенности.

$$\begin{aligned} w_{X_i} &= v_{X_i} \cdot \varepsilon_i + v_{Y_i} \frac{\theta_i}{2}; \\ w_{Y_i} &= v_{X_i} \frac{\theta_i}{2} - v_{Y_i} \cdot \varepsilon_i, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_i$  – скорости деформации удлинения,  $\theta_i$  – скорости деформации сдвига, создаваемые в потоке за счет влияния  $i$ -й вихревой особенности.

Величины  $\varepsilon_i$  и  $\theta_i$  могут быть определены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\vec{r}, t) &= \frac{\Gamma_i (x - x_i)(y - y_i)}{\pi \left( |\vec{r}|^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right)^2}; \\ \theta_i(\vec{r}, t) &= \frac{\Gamma_i (y - y_i)^2 - (x - x_i)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\pi \left( |\vec{r}|^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Чтобы получить суммарное поле скоростей в точке потока, создаваемое всеми особенностями, необходимо просуммировать выражения для скоростей (2) по  $i$ :

$$\begin{aligned} v_X(\vec{r}, t) &= v_{X0}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^N v_{X_i}(\vec{r}, t); \\ v_Y(\vec{r}, t) &= v_{Y0}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^N v_{Y_i}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $N$  – количество вихревых особенностей,  $v_0$  – скорость набегающего потока (задается в качестве исходных данных).

Для определения суммарного поля ускорения следует просуммировать скорости деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{r}, t) &= \varepsilon_0(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\vec{r}, t); \\ \theta(\vec{r}, t) &= \theta_0(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^N \theta_i(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\theta_0$  – скорости деформации набегающего потока.

Тогда суммарное поле ускорений, создаваемое всей системой вихрей и набегающим потоком, выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} w_X(\vec{r}, t) &= v_X(\vec{r}, t) \cdot \varepsilon(\vec{r}, t) + v_Y(\vec{r}, t) \frac{\theta(\vec{r}, t)}{2}; \\ w_Y(\vec{r}, t) &= v_X(\vec{r}, t) \frac{\theta(\vec{r}, t)}{2} - v_Y(\vec{r}, t) \cdot \varepsilon(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.2. Моделирование вихревой пелены вблизи экрана

Экран – горизонтальная твердая стенка – является простейшим вариантом непроницаемой поверхности. На такой поверхности условие непротекания можно обеспечить, применяя формулу Грина для полупространства. Практически это означает, что для получения решения при наличии плоской поверхности всем гидродинамическим особенностям, присутствующим в потоке, нужно поставить в соответствие их зеркальное отображение относительно плоскости экрана. Таким образом, помимо  $N$  особенностей, моделирующих вихревую пелену, в расчете должны использоваться еще  $N$  фиктивных особенностей.

Будем считать, что экран представляет собой горизонтальную плоскость  $y = 0$ . Особенности, относящиеся к фиктивной системе, будем обозначать «домиком» сверху. Их координаты и интенсивность вихрей, в соответствии с принципом зеркального отображения, будут определяться следующим образом:

$$\hat{x}_i = x_i, \quad \hat{y}_i = -y_i, \quad \hat{\Gamma}_i = -\Gamma_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Фиктивные вихревые особенности, расположенные в указанных точках, создают вызванные скорости и скорости деформации, которые вычисляются по формулам (11), (12), при том что в них вместо величин  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\Gamma_i$  подставляются величины  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{y}_i$ ,  $\hat{\Gamma}_i$ , определяемые согласно (13).

Скорости потока и скорости деформации, создаваемые системой фиктивных особенностей, определяются суммированием вклада всех фиктивных вихрей:

$$\begin{aligned} v_{X0}(\vec{r}, t) &= \sum_{i=1}^N \hat{v}_{X_i}(\vec{r}, t); \\ v_{Y0}(\vec{r}, t) &= \sum_{i=1}^N \hat{v}_{Y_i}(\vec{r}, t); \\ \varepsilon_0(\vec{r}, t) &= \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i(\vec{r}, t); \\ \theta_0(\vec{r}, t) &= \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где «домиком» обозначены скорости потока и скорости деформации, создаваемые фиктивными вихрями и вычисляемые по формулам (11), (12) с учетом подстановки (13).

Выражения (14) входят в общие формулы для расчета скоростей (6) и скоростей деформации (8). Алгоритм расчета выполняется в той же последовательности.

### 3.3. Алгоритм расчета

Алгоритм расчета формы вихревой пелены [2] включает в себя определение вклада каждой вихревой точки в скорости потока (6) и скорости деформации (7) во всех расчетных точках (текущих точках расположения вихрей) в момент времени  $t$ . Далее осуществляется суммирование скоростей потока и скоростей деформации в каждой точке и определяются ускорения, после чего определяются новые координаты всех вихревых особенностей в момент времени  $t' = t + \Delta t$ . Данный итерационный процесс повторяется необходимое число раз.

Учет вклада ускорений в выражении (1) позволяет отнести представленный алгоритм к модифицированным вариантам метода Эйлера решения системы дифференциальных уравнений [15].

## 4. Тестовые расчеты

### 4. Case studies

Для верификации представленного в данной работе метода расчета сворачивания вихревой пелены над границей раздела сред будем использовать расчеты, приведенные в работе [10] для движения крыла над экраном.

По аналогии с [10] распределение циркуляции вокруг профилей сечения крыла (циркуляции присоединенных вихрей) по его размаху считалось заданным и соответствовало эллиптическому закону распределения нагрузки по поверхности крыла (т.н. распределение IGE при  $p = 1/2$  в терминологии работы [10]). Кроме того, следуя рекомендациям [14], полученным на основе эксперимента, циркуляция в свободной вихревой пелене считалась распределенной по следующему закону:

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma}{a} \frac{\bar{x}}{\sqrt{(1,12)^2 - \bar{x}^2}}, \quad (11)$$

где  $\Gamma$  – параметр циркуляции,  $a$  – половина размаха крыла, черта сверху над  $x$  означает обезразмеривание по  $a$ , коэффициент 1,12 взят в соответствии с рекомендациями [14].

Вихревая пелена в начальный момент времени имеет форму прямолинейного отрезка  $[-a, a]$ , лежащего параллельно оси  $0x$  на высоте  $y = h$ . Для проведения расчета непрерывная пелена заменялась системой  $N$  дискретных вихрей, расположенных на одинаковом расстоянии в пределах этого отрезка. Координаты вихрей в начале расчета задаются следующим образом:

$$x_i = a \left( \frac{2}{N-1} (i-1) - 1 \right), \quad y_i = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Интенсивность вихрей была различной и определялась по формуле

$$\Gamma_i = a \frac{2}{N} \gamma(x_i). \quad (13)$$

Поскольку на концах крыла интенсивность присоединенных вихрей убывает практически скачком, с концов крыла в поток должны сходить свободные концевые вихри. Их интенсивность задавалась отдельно:

$$\Gamma_0 = -\frac{\Gamma}{2a}, \quad \Gamma_N = \frac{\Gamma}{2a}. \quad (14)$$

Наличие границы раздела сред, как уже было сказано, учитывалось с помощью задания зеркального отображения системы вихрей относительно оси  $0x$ .

Результаты расчета формы вихревой пелены над плоской границей раздела сред представлены на рис. 2 (см. вклейку). Здесь же приведены результаты расчета [10]. Как видно, они хорошо согласуются между собой. Оба результата соответствуют безразмерному моменту времени  $\bar{t} = 4$ . Безразмерная временная переменная определялась следующим образом [10]:

$$\bar{t} = \frac{\Gamma}{a^2} t. \quad (15)$$

## 5. Сворачивание вихревой пелены при движении крыла в свободной воде

### 5. Vortex sheet rollup at foil in free water

На рис. 3 (см. вклейку) представлены результаты расчета формы вихревой пелены в последовательные моменты времени от момента ее схода с выходящей кромки крыла.

На основе этих результатов можно констатировать, что вихревая пелена интенсивно сворачивается с течением времени. Кроме того, вихревые жгуты по мере удаления от крыла опускаются. Причем скорость вертикального движения жгутов постепенно возрастает, достигая величины порядка  $0,11 \cdot \Gamma/a$ . Такое поведение можно объяснить ростом интенсивности вихревых жгутов за счет включения в их состав все большей части вихревой пелены.

Кроме того, можно отметить некоторое сходение вихревых жгутов в направлении продольной оси крыла. Этот процесс, наоборот, наиболее интенсивен в начальный отрезок времени, а по мере

роста вихревых жгутов практически нивелируется. Таким образом, можно считать, что на большом расстоянии от крыла в безграничной жидкости вихревые жгуты будут двигаться только в вертикальном направлении со скоростью  $0,11 \cdot \Gamma/a$ . По крайней мере, такой вывод справедлив для рассматриваемого распределения циркуляции по размаху крыла.

## **6. Исследование сворачивания вихревой пелены при движении крыла над границей раздела сред**

### **6. Vortex sheet rollup at foil above interface**

Результаты расчета сворачивания вихревых пелен при движении крыла над границей раздела сред представлены на рис. 4–6 (см. вклейку) для различной высоты полета  $h$ .

Можно констатировать, что наличие границы раздела существенным образом сказывается на поведении вихревых пелен. При относительно большой высоте движения крыла вихревые пелены первоначально ведут себя аналогично случаю безграничной среды (рис. 4). Однако, когда в процессе опускания вихревые жгуты приближаются к границе раздела, их поведение резко изменяется. Вблизи границы раздела они начинают двигаться вдоль нее в противоположных направлениях (расходиться). Причем чем ближе находится крыло к границе раздела, тем быстрее наступает этот момент.

Интересно отметить, что чем ближе крыло к границе раздела, тем ближе к ней в итоге приближаются вихревые жгуты. Соответственно, чем ближе они к этой границе, тем больше скорость их расхождения в стороны. Теоретически скорость перемещения вихря, расположенного на расстоянии  $u$  от границы раздела, должна составлять  $\Gamma/4u$ , что неплохо коррелирует с полученными результатами.

## **7. Исследование сворачивания вихревой пелены при движении крыла под границей раздела сред**

### **7. Vortex sheet rollup at foil under interface**

В отличие от рассмотренных выше случаев движения крыла в неограниченной среде и над границей раздела сред, в случае движения крыла под границей раздела сред сворачивание вихревой пелены, по-видимому, подробно не исследовалось. Действительно, этот случай выходит за рамки задач, актуальных для авиации. В то же время для судо-

строения он может представлять интерес, т.к. крылья СПК как раз работают в подобных условиях.

Результаты расчета сворачивания вихревых пелен за крылом, движущимся под границей раздела сред, представлены на рис. 7–9 (см. вклейку) для различных величин заглубления крыла под этой границей.

При достаточно большом заглублении крыла, равном его размаху, поведение вихревой пелены мало отличается от случая безграничной жидкости, что хорошо видно на рис. 7, на котором сопоставлены формы вихревых пелен для этих случаев в момент  $\bar{t} = 10$ . При уменьшении заглубления крыла влияние границы раздела становится все более существенным. Наличие этой границы приводит к тому, что формирующиеся вихревые жгуты за концами крыла начинают сближаться между собой. Причем чем ближе крыло к границе раздела, тем быстрее происходит этот процесс.

По мере сближения вихревых жгутов и увеличения их интенсивности они начинают отклоняться вниз. Чем ближе крыло расположено к границе раздела, тем ближе сходятся вихри между собой и тем быстрее они потом опускаются. При заглублении крыла, равном  $1/4$  размаха (рис. 8), эта скорость составляет  $0,125 \cdot \Gamma/a$ , а при заглублении, равном  $1/8$  размаха (рис. 9), она достигает  $0,22 \cdot \Gamma/a$ . Т.е. в последнем случае скорость вертикального движения вихрей в 2 раза превысила аналогичную скорость в случае безграничной жидкости.

Полученные результаты показывают, что при проектировании систем крыльев СПК необходимо учитывать отклонения вихревых пелен за носовой системой крыльев при движении судна на различных скоростях.

## **8. Заключение**

### **8. Conclusion**

Подводя итог, можно констатировать следующее:

- Модифицирован метод расчета сворачивания вихревой пелены за крылом в плоскости Треффта для случая движения крыла вблизи границы раздела сред. Метод верифицирован на основе результатов, представленных в работе [10].
- Проведены исследования деформации вихревых пелен при движении крыла вблизи границы раздела сред при различном расстоянии от этой границы. Расчеты показали существенное различие в поведении вихревых пелен при движении крыла над или под границей раздела. При движении крыла над границей раздела вихревые жгуты

движутся в разные стороны вдоль этой границы, а при движении под границей раздела вихревые жгуты сначала движутся навстречу друг другу, а потом начинают быстро опускаться.

- Получены оценки скорости перемещения вихрей в зависимости от расстояния до границы раздела сред.
- Проведенное исследование поведения вихревых пелен за крылом, движущимся под границей раздела сред, представляет интерес для проектирования систем крыльев СПК. В частности, планируется интегрировать созданный расчетный метод в программу расчета крыльевых систем СПК, разработанную в СПб ГМТУ [16].

## Список использованной литературы

1. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. 6-е изд., испр. и доп. Москва : Физматгиз, 1963. 583 с.
2. *Киав З.Х.* Моделирование сворачивания вихревых пелен за крылом // Теплообмен и гидродинамика в закрученных потоках : сборник научных трудов X Международной конференции. Архангельск, 2025. С. 75–76.
3. *Rozhdestvensky K.V.* Wing-in-ground effect vehicles // Progress in Aerospace sciences. 2006. Vol. 42, № 3. P. 211–283. DOI: 10.1016/j.paerosci.2006.10.001.
4. *Rozhdestvensky K.V.* Aerodynamics of a lifting system in extreme ground effect. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2000. X, 352 p.
5. *Han C., Cho J.* Unsteady trailing vortex evolution behind a wing in ground effect // Journal of aircraft. 2005. Vol. 42, № 2. P. 429–434. DOI: 10.2514/1.6477.
6. *Mokry M.* Numerical simulation of aircraft trailing vortices interacting with ambient shear or ground // Journal of aircraft. 2001. Vol. 38, № 4. P. 636–643. DOI: 10.2514/2.2840.
7. *Артюшков Л.С., Ачкинадзе А.Ш., Русецкий А.А.* Судовые движители. Ленинград : Судостроение, 1988. 294, [1] с.
8. *Carlton J.S.* Marine propellers and propulsion. 3<sup>rd</sup> ed. Amsterdam [et al.] : Elsevier, 2012. XXI, 516 p.
9. *Яковлев А.Ю.* Расчет изменения формы вихревых пелен в следе гребного винта // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2007. Вып. 31(315). С. 55–68.
10. *Han C., Kinnas S.A.* Study on the wake shape behind a wing in ground effect using an unsteady discrete vortex panel method // Open journal of fluid dynamics. 2013. Vol. 3, № 4. P. 261–265. DOI: 10.4236/ojfd.2013.34032.
11. *Lee H.* Modeling of unsteady wake alignment and developed tip vortex cavitation : Ph. D. thesis / University of Texas at Austin. Austin, 2002. XXIII, 193 p.
12. *Krasny R.* Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane // Journal of fluid mechanics. 1987. Vol. 184. P. 123–155. DOI: 10.1017/S0022112087002830.
13. *Kantelis J.P., Widnall S.E.* Calculations of axisymmetric vortex using a panel and a filament model / Fluid dynamics research laboratory, Dept. of aeronautics and astronautics ; Massachusetts Institute of technology. Cambridge, 1986. 181 p. (FDRL Report ; 86-1).
14. On the roll-up of a trailing vortex sheet in the very near field / *A.L. Heyes, S.J. Hubbard, A.J. Marquis, D.A. Smith* // Proceedings of the Institution of mechanical engineers. Pt. G: Journal of aerospace engineering. 2003. Vol. 217, № 5. P. 262–268. DOI: 10.1243/095441003770887368.
15. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа : Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. 3-е изд., перераб. Москва : Наука, 1967. 368 с.
16. Гидромеханика / *А.Ш. Ачкинадзе, А.П. Бесядовский, В.В. Васильева* [и др.]. Санкт-Петербург : Мор Вест, 2007. 550, [1] с.

## References

1. *Kochin N.E., Kibel I.A., Rose N.V.* Theoretical hydromechanics. Part 1. 6<sup>th</sup> edition, revised and supplemented. Moscow : Fizmatgiz, 1963. 583 p. (*in Russian*).
2. *Kiav Z.Kh.* Modelling of vortex sheet rollup in wake of a foil. Heat mass exchange and hydrodynamics in swirling flows: Proceedings of X International Conference. Arkhangelsk, 2025. P. 75–76. (*in Russian*).
3. *Rozhdestvensky K.V.* Wing-in-ground effect vehicles // Progress in Aerospace sciences. 2006. Vol. 42, № 3. P. 211–283. DOI: 10.1016/j.paerosci.2006.10.001.
4. *Rozhdestvensky K.V.* Aerodynamics of a lifting system in extreme ground effect. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2000. X, 352 p.
5. *Han C., Cho J.* Unsteady trailing vortex evolution behind a wing in ground effect // Journal of aircraft. 2005. Vol. 42, № 2. P. 429–434. DOI: 10.2514/1.6477.
6. *Mokry M.* Numerical simulation of aircraft trailing vortices interacting with ambient shear or ground // Journal of aircraft. 2001. Vol. 38, № 4. P. 636–643. DOI: 10.2514/2.2840.
7. *Artyushkov L.S., Achkinadze A.Sh., Rusetsky A.A.* Ship propulsors. Leningrad : Sudostroenie, 1988. 294, [1] p. (*in Russian*).
8. *Carlton J.S.* Marine propellers and propulsion. 3<sup>rd</sup> ed. Amsterdam [et al.] : Elsevier, 2012. XXI, 516 p.
9. *Yakovlev A.Yu.* Calculations of vortex sheet shape changes in wake of propeller // Transactions of Krylov Central Research Institute. 2007. Vol. 31(315). P. 55–68 (*in Russian*).

10. *Han C., Kinnas S.A.* Study on the wake shape behind a wing in ground effect using an unsteady discrete vortex panel method // *Open journal of fluid dynamics*. 2013. Vol. 3, № 4. P. 261–265. DOI: 10.4236/ojfd.2013.34032.
11. *Lee H.* Modeling of unsteady wake alignment and developed tip vortex cavitation: Ph. D. thesis / University of Texas at Austin. Austin, 2002. XXIII, 193 p.
12. *Krasny R.* Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane // *Journal of fluid mechanics*. 1987. Vol. 184. P. 123–155. DOI: 10.1017/S0022112087002830.
13. *Kantelis J.P., Widnall S.E.* Calculations of axisymmetric vortex using a panel and a filament model / Fluid dynamics research laboratory, Dept. of aeronautics and astronautics; Massachusetts Institute of technology. Cambridge, 1986. 181 p. (FDRL Report; 86-1).
14. On the roll-up of a trailing vortex sheet in the very near field / *A.L. Heyes, S.J. Hubbard, A.J. Marquis, D.A. Smith* // *Proceedings of the Institution of mechanical engineers*. Pt. G: *Journal of aerospace engineering*. 2003. Vol. 217, № 5. P. 262–268. DOI: 10.1243/095441003770887368.
15. *Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z.*, Numerical analysis methods. Approximated functions, differential and integral equations. 3<sup>rd</sup> edition, revised. Moscow: Nauka, 1967. 368 p. (*in Russian*).
16. *Hydromechanics / A.Sh. Achkinadze, A.R. Besyadovskiy, V.V. Vasilieva [et al.]*. St. Petersburg: Mor Vest, 2007. 550, [1] p. (*in Russian*).

---

#### Сведения об авторах

*Яковлев Алексей Юрьевич*, д.т.н., доцент, заведующий кафедрой гидроаэромеханики и морской акустики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет». Адрес: 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., д. 3. E-mail: kgm@smtu.ru.

*Киав Зин Хтун*, аспирант кафедры гидроаэромеханики и морской акустики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет». Адрес: 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., д. 3. E-mail: kyawzinhtun5188@mail.ru.

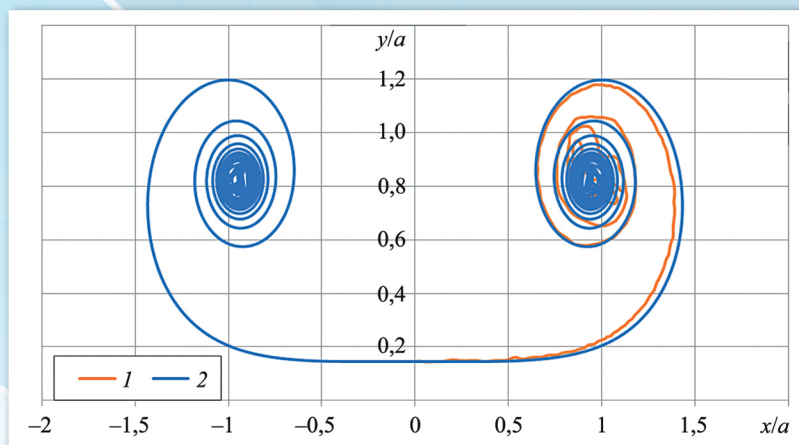
#### About the authors

*Alexey Yu. Yakovlev*, Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of Hydroaeromechanics and Marine Acoustics Department, St. Petersburg State Marine Technical University. Address: 3, Lotsmanskaya st., St. Petersburg, Russia, post code 190121. E-mail: kgm@smtu.ru.

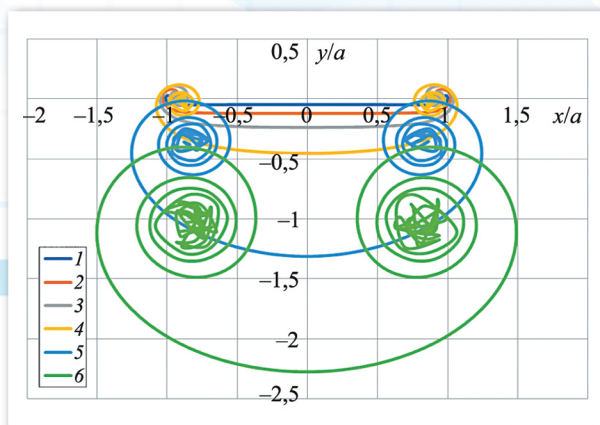
*Zin Kh. Kiav*, Postgraduate Student of Hydroaeromechanics and Marine Acoustics Department, St. Petersburg State Marine Technical University. Address: 3, Lotsmanskaya st., St. Petersburg, Russia, post code 190121. E-mail: kyawzinhtun5188@mail.ru.

Поступила / Received: 02.10.25  
Принята в печать / Accepted: 25.02.26  
© Яковлев А.Ю., Киав З.Х., 2026

**Рис. 2.** Сопоставление результатов расчетов формы вихревой пелены за крылом с эллиптическим распределением нагрузки, расположенным над экраном на высоте  $h = a$ , в момент времени  $\bar{t} = 4$ , выполненных по представленному методу, с расчетами других авторов. 1 – результаты Han&Kinnas [10]; 2 – расчет по представленному методу с шагом по времени  $\Delta t = 0,001$

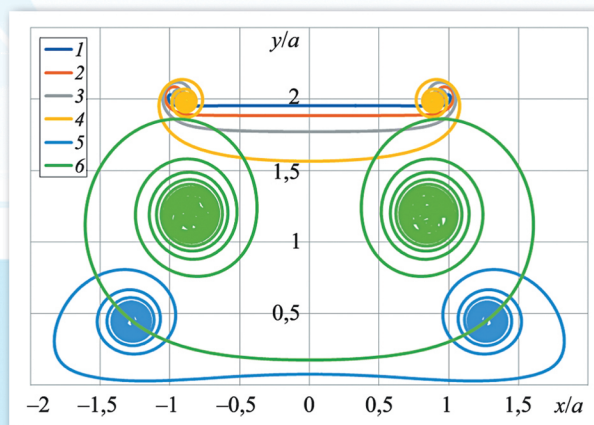


**Fig. 2.** Calculations of the vortex shape with elliptical load distribution above the interface at height  $h = a$ , in time instant  $\bar{t} = 4$  obtained with the suggested method and calculations of other authors. 1 – Han&Kinnas [10]; 2 – calculations with the suggested method at time step  $\Delta t = 0.001$



**Рис. 3.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся в безграничной среде в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = 2a$ . 1 –  $\bar{t} = 0,1$ ; 2 –  $\bar{t} = 0,25$ ; 3 –  $\bar{t} = 0,5$ ; 4 –  $\bar{t} = 1,0$ ; 5 –  $\bar{t} = 4,0$ ; 6 –  $\bar{t} = 10,0$

**Fig. 3.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil in unbounded fluid in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height above interface  $h = 2a$ . 1 –  $\bar{t} = 0.1$ ; 2 –  $\bar{t} = 0.25$ ; 3 –  $\bar{t} = 0.5$ ; 4 –  $\bar{t} = 1.0$ ; 5 –  $\bar{t} = 4.0$ ; 6 –  $\bar{t} = 10.0$

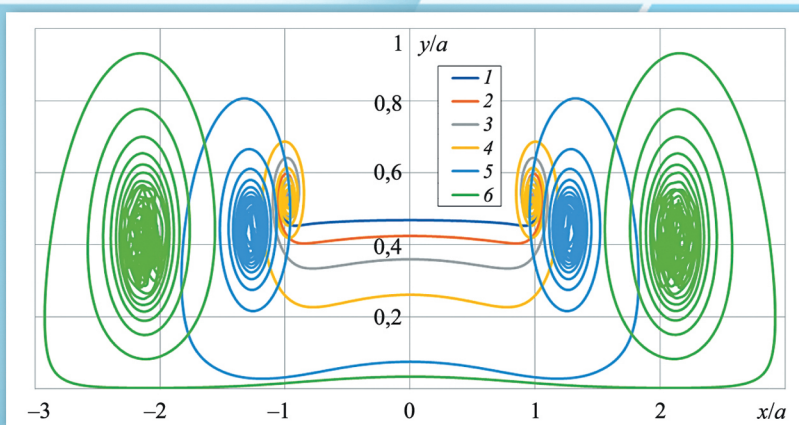


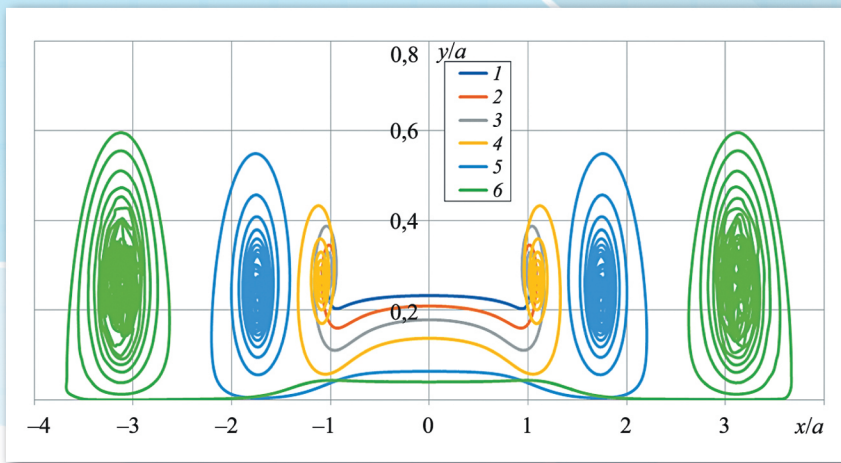
**Рис. 4.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся над границей раздела сред в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = 2a$ . 1 –  $\bar{t} = 0,1$ ; 2 –  $\bar{t} = 0,25$ ; 3 –  $\bar{t} = 0,5$ ; 4 –  $\bar{t} = 1,0$ ; 5 –  $\bar{t} = 4,0$ ; 6 –  $\bar{t} = 10,0$

**Fig. 4.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil above interface in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height above interface  $h = 2a$ . 1 –  $\bar{t} = 0.1$ ; 2 –  $\bar{t} = 0.25$ ; 3 –  $\bar{t} = 0.5$ ; 4 –  $\bar{t} = 1.0$ ; 5 –  $\bar{t} = 4.0$ ; 6 –  $\bar{t} = 10.0$

**Рис. 5.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся над границей раздела сред в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = 2/a$ . 1 –  $\bar{t} = 0,1$ ; 2 –  $\bar{t} = 0,25$ ; 3 –  $\bar{t} = 0,5$ ; 4 –  $\bar{t} = 1,0$ ; 5 –  $\bar{t} = 4,0$ ; 6 –  $\bar{t} = 10,0$

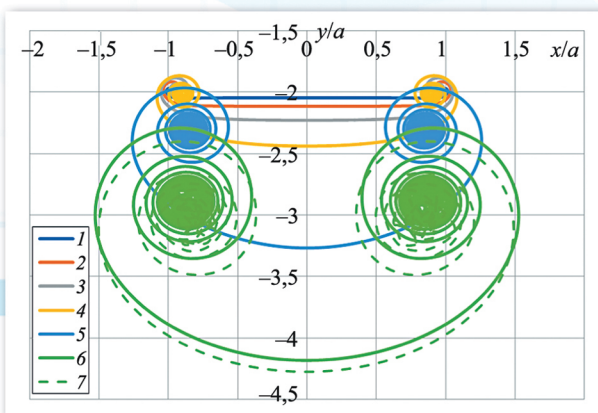
**Fig. 5.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil above interface in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height above interface  $h = 2/a$ . 1 –  $\bar{t} = 0.1$ ; 2 –  $\bar{t} = 0.25$ ; 3 –  $\bar{t} = 0.5$ ; 4 –  $\bar{t} = 1.0$ ; 5 –  $\bar{t} = 4.0$ ; 6 –  $\bar{t} = 10.0$





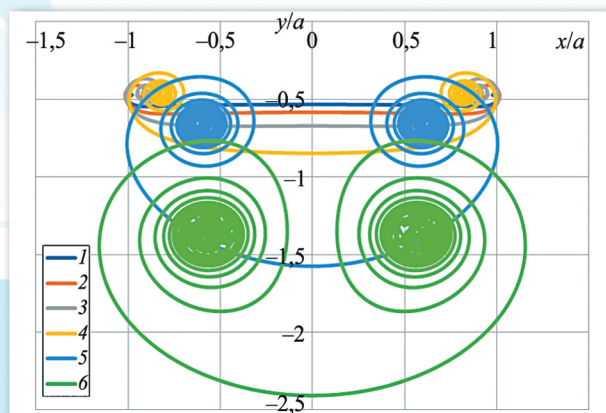
**Рис. 6.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся над границей раздела сред в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = a/4$ .  
 $1 - \bar{t} = 0,1$ ;  $2 - \bar{t} = 0,25$ ;  
 $3 - \bar{t} = 0,5$ ;  $4 - \bar{t} = 1,0$ ;  
 $5 - \bar{t} = 4,0$ ;  $6 - \bar{t} = 10,0$

**Fig. 6.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil above interface in different time instants after passage of the foil trailing edge in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height above interface  $h = a/4$ .  
 $1 - \bar{t} = 0.1$ ;  $2 - \bar{t} = 0.25$ ;  $3 - \bar{t} = 0.5$ ;  
 $4 - \bar{t} = 1.0$ ;  $5 - \bar{t} = 4.0$ ;  $6 - \bar{t} = 10.0$



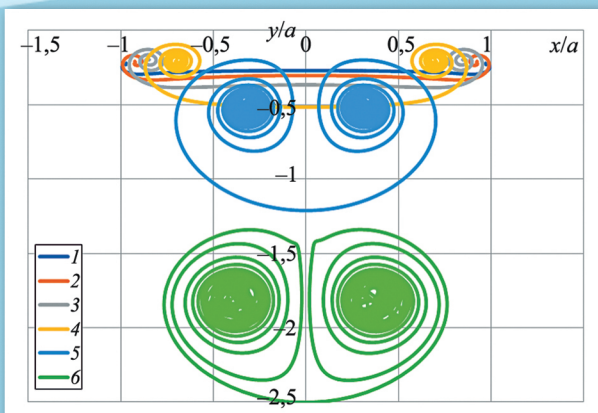
**Рис. 7.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся под границей раздела сред в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = 2a$ .  $1 - \bar{t} = 0,1$ ;  $2 - \bar{t} = 0,25$ ;  
 $3 - \bar{t} = 0,5$ ;  $4 - \bar{t} = 1,0$ ;  $5 - \bar{t} = 4,0$ ;  $6 - \bar{t} = 10,0$ ; 7 - пелена в безграничной жидкости в момент времени  $\bar{t} = 10$

**Fig. 7.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil under interface in different time instants after passage of the foil trailing edge in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height with respect to interface  $h = 2a$ .  $1 - \bar{t} = 0.1$ ;  $2 - \bar{t} = 0.25$ ;  $3 - \bar{t} = 0.5$ ;  $4 - \bar{t} = 1.0$ ;  
 $5 - \bar{t} = 4.0$ ;  $6 - \bar{t} = 10.0$ ; 7 - vortex sheet in unbounded fluid in time instant  $\bar{t} = 10$



**Рис. 8.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся под границей раздела сред в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = 2a/2$ .  $1 - \bar{t} = 0,1$ ;  $2 - \bar{t} = 0,25$ ;  $3 - \bar{t} = 0,5$ ;  $4 - \bar{t} = 1,0$ ;  
 $5 - \bar{t} = 4,0$ ;  $6 - \bar{t} = 10,0$

**Fig. 8.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil under interface in different time instants after passage of the foil trailing edge in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height with respect to interface  $h = 2a/2$ .  $1 - \bar{t} = 0.1$ ;  $2 - \bar{t} = 0.25$ ;  $3 - \bar{t} = 0.5$ ;  $4 - \bar{t} = 1.0$ ;  
 $5 - \bar{t} = 4.0$ ;  $6 - \bar{t} = 10.0$



**Рис. 9.** Результаты расчета формы вихревой пелены за крылом, движущимся под границей раздела сред в различные моменты времени, после прохождения выходящей кромки крыла. Высота полета крыла над границей раздела  $h = a/4$ .  
 $1 - \bar{t} = 0,1$ ;  $2 - \bar{t} = 0,25$ ;  $3 - \bar{t} = 0,5$ ;  $4 - \bar{t} = 1,0$ ;  
 $5 - \bar{t} = 4,0$ ;  $6 - \bar{t} = 10,0$

**Fig. 9.** Calculations of the vortex shape in wake of the foil under interface in different time instants after passage of the foil trailing edge in different time instants after passage of the foil trailing edge. Foil height with respect to interface  $h = a/4$ .  $1 - \bar{t} = 0.1$ ;  $2 - \bar{t} = 0.25$ ;  $3 - \bar{t} = 0.5$ ;  $4 - \bar{t} = 1.0$ ;  
 $5 - \bar{t} = 4.0$ ;  $6 - \bar{t} = 10.0$