


DOI: 10.24937/2542-2324-2023-3-405-116-125
УДК 621.3.082.743.4
EDN: PLBCLG

Г.Н. Цицикян¹ , М.Ю. Антипов¹, Н.В. Коровкин², О.В. Савченко¹

¹ ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

ИНДУКТИВНОСТИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ В СОЛЕНОИДАХ НАГРУЗОЧНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ИСПЫТАНИЯ ГЕНЕРАТОРНЫХ АГРЕГАТОВ

Объект и цель научной работы. Объектом исследования являются соленоиды нагрузочных устройств. Цели – определение индуктивностей и электродинамических сил взаимодействия между коаксиальными соленоидами при внутреннем, внешнем и промежуточном расположении; нахождение сжимающих сил.

Материалы и методы. Методы теоретической электротехники.


Основные результаты. Получены выражения для коэффициентов взаимной индукции и электродинамических сил взаимодействия в виде хорошо сходящихся рядов, пригодных для непосредственного практического применения.

Заключение. Представленная статья отражает ряд новых результатов, полученных для взаимных индуктивностей и электродинамических сил в общем случае коаксиального расположения многovitковых соленоидов.

Ключевые слова: коаксиальные соленоиды, электродинамические силы, внутреннее расположение, внешнее расположение, промежуточное расположение.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

DOI: 10.24937/2542-2324-2023-3-405-116-125
UDC 621.3.082.743.4
EDN: PLBCLG

G.N. Tsitsikyan¹ , M.Yu. Antipov¹, N.V. Korovkin², O.V. Savchenko¹

¹ Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

² Peter the Great St. Petersburg State Polytechnical University, St. Petersburg, Russia

INDUCTANCES AND ELECTRODYNAMIC FORCES IN LOADING SOLENOIDS FOR GENSET TESTING

Object and purpose of research. This paper investigates loading solenoids to determine inductances and electrodynamic forces of interaction between coaxial solenoids for internal, external and intermediate arrangement, as well as to obtain compressive forces.

Materials and methods. The study follows the methods of theoretical electric engineering.

Main results. The study yielded the expressions for mutual induction coefficients and electrodynamic forces as well-converging series suitable for direct practical application.

Conclusion. The paper presents a number of new results obtained for mutual inductances and electrodynamic forces in the general case of coaxial arrangement for multi-coil solenoids.

Keywords: coaxial solenoids, electrodynamic forces, internal arrangement, external arrangement, intermediate arrangement.

The authors declare no conflicts of interest.

Для цитирования: Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю., Коровкин Н.В., Савченко О.В. Индуктивности и электродинамические силы в соленоидах нагрузочных устройств для испытания генераторных агрегатов. Труды Крыловского государственного научного центра. 2023; 3(405): 116–125.

For citations: Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu., Korovkin N.V., Savchenko O.V. Inductances and electrodynamic forces in loading solenoids for genset testing. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2023; 3(405): 116–125 (in Russian).

В статье рассматриваются современные нагрузочные устройства, предназначенные для проверки, наладки и настройки, а также для проведения сдаточных испытаний автономных источников переменного тока промышленной и повышенной частоты.

В настоящее время распространение получили нагрузочные устройства, у которых в качестве элементов нагрузки используются соосные соленоиды. Их конструкции должны быть стойкими к электродинамическим воздействиям, уровень которых может достигать значительных величин.

Нагрузочные устройства, как правило, выполнены в виде бака с размещенными внутри соленоидами по три на ступень для трехфазного исполнения и прикрепленным к нему распределительным щитом с коммутирующими устройствами. К распределительному щиту подключается и проверяемая установка. Проверка и наладка генератора обычно выполняются при нагрузках 25, 50, 75 и 100 % номинальной мощности устройства при коэффициенте мощности на уровне 0,8 с отклонением $\pm 5\%$.

Ступени нагрузочных устройств для реализации коэффициента мощности на уровне 0,8 должны обладать значительной индуктивностью, которая достигается применением коаксиальных многовитковых соленоидов, плотно намотанных на диэлектрический каркас. Материал проводников может обладать различным удельным сопротивлением для реализации требования по активной нагрузке. Нагрузочные устройства мощностью несколько сот киловатт и выше выполняются с принудительным охлаждением. Соленоиды закрепляются в баках с охлаждающей жидкостью, как правило, проточной пресной водой.

Следует отметить, что соосные взаимодействующие соленоиды с возможностью перемещения для практических приложений иного рода, в частности, для обеспечения бесконтактной зарядки и для ускоренного движения одних относительно других, из-

вестны и даны в работах, приведенных выборочно в библиографическом списке [9–12].

Электродинамические силы, действующие на соленоиды, могут определяться дифференцированием по соответствующим обобщенным координатам выражений для собственных и взаимных индуктивностей. Поэтому рассмотрим вычисление последних подробнее. Для вычисления взаимной индуктивности M коаксиальных соленоидов в [1] предлагается использование табличных значений, определяемых по геометрическим размерам соленоидов. Альтернативный метод вычисления M [2] состоит в использовании быстро сходящихся рядов по безразмерным параметрам $q_1 \div q_4$ (рис. 1):

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a - s_1 - s_2}{R_2}, & q_2 &= \frac{a + s_1 - s_2}{R_2}, \\ q_3 &= \frac{a + s_1 + s_2}{R_2}, & q_4 &= \frac{a - s_1 + s_2}{R_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно [2] для соленоидов с общей осью (рис. 1) имеем:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\pi \mu_0 w_1 w_2 R_1}{2s_1 2s_2 R_1 R_2} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} \left\{ \zeta_k^{\frac{1}{2} - q_k} \rho^2 \frac{\zeta_k^{\frac{-3}{2}}}{16} - \right. \\ &- \rho^4 \frac{(1 - 4q_k^2) \zeta_k^{\frac{-7}{2}}}{128} - \rho^6 \frac{5(8q_k^4 - 12q_k^2 + 1) \zeta_k^{\frac{-11}{2}}}{2048} + \\ &\left. + \rho^8 \frac{7(64q_k^6 - 240q_k^4 + 120q_k^2 - 5) \zeta_k^{\frac{-15}{2}}}{32786} \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\zeta_k = q_k^2 + 1, \quad \rho = \frac{R_1}{R_2}.$$

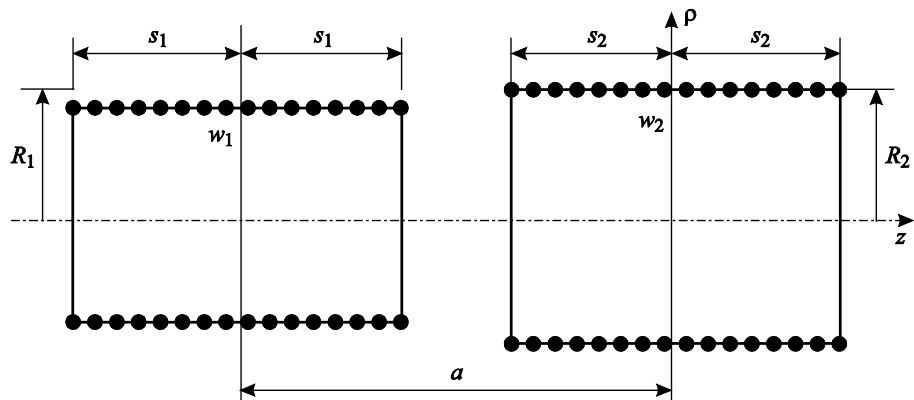


Рис. 1. Соленоиды с общей осью, a – расстояние между плоскостями симметрии

Fig. 1. Coaxial solenoids: a – distance between symmetry planes

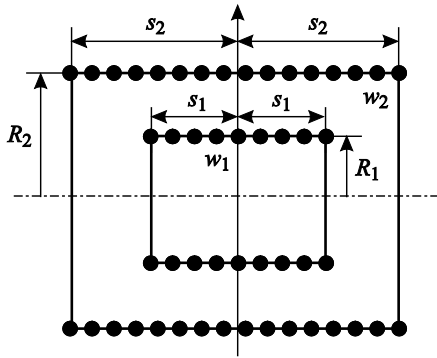


Рис 2. Концентрические соленоиды с симметричным расположением

Fig. 2. Concentric solenoids (symmetric arrangement)

Для коэффициента взаимной индукции двух контуров ($w_1 = w_2 = 1$) можно записать следующее выражение:

$$M \Big|_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} = \frac{\pi \mu_0 R_1^2}{2R_2} \left\{ (q^2 + 1)^{-3/2} + \frac{3}{8} \rho^2 \frac{1 - 4q^2}{(q^2 + 1)^{7/2}} + \frac{15}{64} \rho^4 \frac{8q^4 - 12q^2 + 1}{(q^2 + 1)^{11/2}} - \frac{35}{1024} \rho^6 \frac{64q^6 - 240q^4 + 120q^2 - 5}{(q^2 + 1)^{15/2}} \dots \right\}, \quad q = \frac{a}{R_2}. \quad (3)$$

Рассмотрим характерные частные случаи: $a = 0$ и $R_1 < R_2$ (рис. 2).

Учитывая структуру формулы (2), при симметричном расположении соленоидов будем иметь следующее выражение для коэффициента взаимной индукции:

$$M \Big|_{a=0} = \frac{\pi \mu_0 w_1 w_2 R_1}{\left(\frac{2s_1}{R_1}\right) \left(\frac{2s_2}{R_2}\right)} \times \left\{ \left[(q_1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 (q_1^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{64} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 (1 - 4q_1^2) (q_1^2 + 1)^{-\frac{7}{2}} - \frac{5}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6 (8q_1^4 - 12q_1^2 + 1) (q_1^2 + 1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \right] - \right.$$

$$\left. - \left[(q_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 (q_2^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{64} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 (1 - 4q_2^2) (q_2^2 + 1)^{-\frac{7}{2}} - \frac{5}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6 (8q_2^4 - 12q_2^2 + 1) (q_2^2 + 1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \right] \right\}, \quad (4)$$

где $q_1 = -\frac{s_1 + s_2}{R_2}$, $q_2 = \frac{s_1 - s_2}{R_2}$. (5)

При $s_1 = s_2 = s$ (рис. 3), $q_1 = q = -\frac{2s}{R_2}$ и $q_2 = 0$ на основании (4) можно записать:

$$M \Big|_{\substack{a=0 \\ s_1=s_2=s}} = \frac{\pi \mu_0 w_1 w_2 R_1}{4s^2 R_1 R_2} \times \left\{ \left[(q^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 (q^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{64} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 (1 - 4q^2) (q^2 + 1)^{-\frac{7}{2}} - \frac{5}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6 (8q^4 - 12q^2 + 1) (q^2 + 1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \right] - \right.$$

$$\left. - 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 + \frac{5}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6 + \dots \right\} =$$

$$= \frac{\pi \mu_0 w_1 w_2 R_1}{4s^2 R_1 R_2} \left\{ (q^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \right.$$

$$\times \left[1 - (q^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{64} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 \left[1 - (1 - 4q^2) (q^2 + 1)^{-\frac{7}{2}} \right] +$$

$$\left. + \frac{5}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6 \left[1 - (8q^4 - 12q^2 + 1) (q^2 + 1)^{-\frac{11}{2}} \right] + \dots \right\}. \quad (6)$$

Формулу (4) следует сопоставить с выражением (7.9) в [1] для взаимной индуктивности в случае симметричного расположения (рис.2) соленоидов. В принятых здесь обозначениях формула (7.9) в [1] может быть представлена в виде:

$$M = \pi \mu_0 \frac{R_1^2 w_1 w_2}{2s_2 2s_1} (l_1 F_1 - l_2 F_2), \quad (7)$$

где $l_1 = \sqrt{R_2^2 + (s_1 + s_2)^2}$, $l_2 = \sqrt{R_2^2 + (s_1 - s_2)^2}$, а значения функций F_1 и F_2 , приведенные в таблицах (7-1) и (7-2) [1], определяются по $\delta = R_1/R_2$ и, соответственно, по

$$\lambda_1^2 = R_2^2 / (R_2^2 + (s_1 + s_2)^2),$$

$$\lambda_2^2 = R_2^2 / (R_2^2 + (s_1 - s_2)^2).$$

Положим $s_1 = 0,5s_2$ и $R_2 = s_2$. Тогда $l_1 = 1,8028R_2$, $l_2 = 1,118R_2$,

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{R_2}{1,8028R_2} \right)^2 \cong 0,308;$$

$$\lambda_2^2 = \left(\frac{R_2}{1,118R_2} \right)^2 = 0,8.$$

Теперь по значениям λ_1^2 , λ_2^2 и $\delta = R_1/R_2$, которое примем равным 0,5, находим по таблице (7-1) [1] следующие численные значения для F_1 и F_2 : 0,997 и 0,98. Тогда согласно (7) будем иметь при $R_1 = 0,5R_2$: $M = \pi \mu_0 w_1 w_2 R_2 \cdot 0,088$.

Для сопоставления в формулу (4) следует подставить $s_1 = 0,5s_2$, $R_1 = 0,5R_2$, $q_1 = -1,5(s_2/R_2)$ и $q_2 = -0,5(s_2/R_2)$. При $R_2 = s_2$ имеем $q_1 = -1,5$, $q_2 = -0,5$. Результат вычисления по формуле (4) по первым трем членам ряда в квадратных скобках дает $M = \pi \mu_0 w_1 w_2 R_2 \cdot 0,0877$, т.е. имеем практическое совпадение.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда концентрические соленоиды одинаковы по длине $s_1 = s_2 = s$ (рис. 3), при сохранении соотношения радиусов $R_1 = 0,5R_2$ и считая, что R_2 остается равным s_2 .

В этом случае по формуле (6) при $q = -2$ имеем:

$$M \Big|_{q=-2} = \frac{\pi}{8} \mu_0 w_1 w_2 0,5R_2 \times \\ \times \left(5^{1/2} - 1 + \frac{0,25}{8} (1 - 5^{-3/2}) + \frac{1}{64} 0,0625 (1 + 15 \cdot 5^{-7/2}) + \dots \right) = \\ = \pi \mu_0 w_1 w_2 R_2 \cdot 0,0791.$$

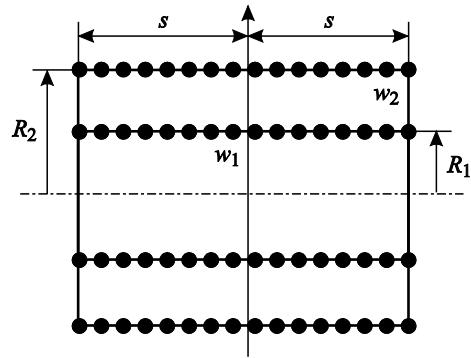


Рис. 3. Концентрические соленоиды одинаковой длины

Fig. 3. Concentric solenoids of the same length

Полученный результат сравним с расчетным выражением (7-1) в [1], где в обозначениях (рис. 3) имеем:

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_0 w_1 w_2 \left(\frac{2R_1}{2s} \right)^2 (l_1 F_1 - l_2 F_2),$$

$$l_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(2R_2)^2 + 4(2s)^2}, \quad l_2 = R_2,$$

$$s = R_2, \quad R_1 = 0,5R_2.$$

Тогда

$$l_1 = 0,5R_2 \sqrt{20}, \quad \delta = R_1 / R_2 = 0,5,$$

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{R_2}{0,5R_2 \sqrt{20}} \right)^2 = 0,2, \quad \lambda_2^2 = 1,0,$$

и по таблицам значений находим $F_1 = 0,99877$, $F_2 = 0,96769$ [1].

Их подстановка в выражение для M приводит к результату:

$$M \Big|_{s_1=s_2=s} = \frac{\pi}{16} \mu_0 w_1 w_2 \times \\ \times (0,5R_2 \sqrt{20} \cdot 0,99877 - 0,96769 R_2) = \\ = \pi \mu_0 w_1 w_2 R_2 \cdot 0,0791.$$

Таким образом, численные оценки и для рассматриваемого случая практически совпадают. Вместе с тем следует отметить, что использование формул (5) и (6) не связано с необходимостью обращения к табличным значениям в [1] и, соответственно, позволяет выполнять дифференцирование

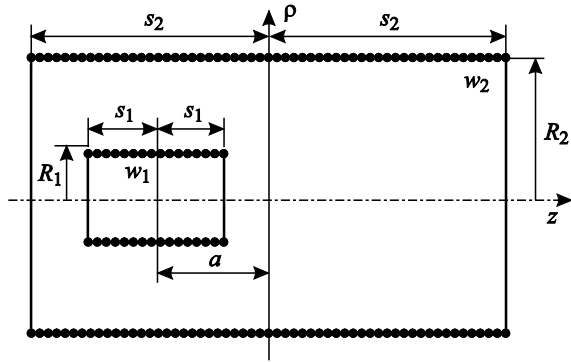


Рис. 4. Соосные соленоиды при внутреннем расположении

Fig. 4. Coaxial solenoids (internal arrangement)

по геометрическим параметрам соленоидов при нахождении электромагнитных сил.

В руководствах [1, 3], а также в [4] в преобразованной форме, для случая соленоидов одинаковой длины (рис. 3) рекомендовано выражение для взаимной индуктивности в обозначениях рис. 3 в виде:

$$M = \mu_0 \frac{\pi w_1 w_2}{8 (2s)^2} (2R_1)^2 \times 2R_2 \left(g_1 + \frac{\delta^2}{8} g_3 + \frac{\delta^4}{64} g_5 + \frac{5\delta^6}{1024} g_7 + \dots \right), \quad (8)$$

где $g_1 = -1 + \gamma^{-1}$, $g_3 = 1 - \gamma^3$, $g_5 = 1 + 4\gamma^5 - 5\gamma^7$, $g_7 = 1 - 8\gamma^7 + 28\gamma^9 - 21\gamma^{11}$,

$$\delta = \frac{R_1}{R_2}, \quad \gamma = \frac{2R_2}{\sqrt{(2R_2)^2 + 4(2s)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2s}{R_2}\right)^2}} = (1 + q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{и } q = -\frac{2s}{R_2}.$$

После подстановки δ , g_1 , g_3 , $g_5 \dots$ в выражение (8) оно не будет отличаться от выражения (6).

Выражение для взаимной индукции в виде ряда, отвечающее симметричному расположению соленоидов в соответствии с рис. 2, дано в опубликованной еще в 1937 г. статье [5] Двайтом и Гровером. В обозначениях этого рисунка и при ограничении первыми двумя членами ряда [5] оно может быть записано в виде:

$$M = \frac{\mu_0 \pi w_1 w_2 R_2}{2 \left(\left(\frac{s_2}{R_2} \right) + 1 \right)^{1/2}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{(R_1/R_2)^2}{\left[(s_2/R_2)^2 + 1 \right]^2} \left[3 - 4 \left(\frac{s_1}{R_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{32} \frac{(R_1/R_2)^4}{\left[(s_2/R_2)^2 + 1 \right]^4} \left[3 - 4 \left(\frac{s_2}{R_2} \right)^2 \right] \times \left[\frac{5}{2} - 10 \left(\frac{s_1}{R_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{s_1}{R_1} \right)^4 \right] + \dots \right\}. \quad (9)$$

Имея результат в виде $(\pi/8)\mu_0 w_1 w_2 R_2 \cdot 0,7018$, при $s = R_2$, $R_1/R_2 = 0,5$ и $s_1 = 0,5s_2$ сопоставим его с выражением (9). Тогда получаем:

$$M = \frac{\mu_0 \pi w_1 w_2 R_2}{2\sqrt{2}} (0,5)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{8} \frac{(0,5)^2}{4} [3 - 4] \right\} = \frac{\mu_0 \pi w_1 w_2 R_2}{8} \cdot 0,7016,$$

т.е. и здесь обнаруживается практическое совпадение.

Рассмотрим далее рекомендации по расчету электродинамических сил при расположении соленоида 1 внутри соленоида 2 (рис. 4).

В работе [2] для случая $R_1 < R_2$ и $a + s_1 \leq s_2$ (рис. 4) дано выражение для силы, действующей на соленоид 1 вдоль оси в виде, предполагающем четырехкратное суммирование:

$$f = \frac{\pi \mu_0 i_1 i_2 w_1 w_2}{\left(\frac{2s_1}{R_1} \right) \left(\frac{2s_2}{R_2} \right)} \frac{R_1}{R_2} \times \times \sum_{k=1}^4 (-1)^k \left[-\frac{1}{2} \left((q_k^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - q_k \right) (q_k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{16} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 q_k (q_k^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} + \frac{5}{128} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 q_k (3 - 4q_k^2) (q_k^2 + 1)^{-\frac{9}{2}} - \frac{35}{2048} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6 \times q_k (-8q_k^4 + 20q_k^2 - 5) (q_k^2 + 1)^{-\frac{13}{2}} + \dots \right], \quad (10)$$

$$q_1 = \frac{a - s_1 - s_2}{R_2}, \quad q_2 = \frac{a + s_1 - s_2}{R_2},$$

$$q_3 = \frac{s_1 - s_2 - a}{R_2}, \quad q_4 = \frac{-a - s_1 - s_2}{R_2}.$$

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ выражение (10) обращается в ноль. В этом случае $q_1 = q_4$ и $q_2 = q_3$, но при q_1 и q_4 , q_2 и q_3 результаты имеют противоположные знаки.

Рассмотрим теперь внутреннее расположение соленоида, как показано на рис. 5.

Здесь $2s_1 = s_2$ и $a = s_2/2$. Как и ранее, зададимся значением $s_2/R_2 = 1,0$. Выражение (10) при $w_2 = w$, $w_1 = 0,5w$ в предположении, что $R_1 = 0,5R_2$, запишем при условии, что $i_2 = i_1 = i$. Имеем: $q_1 = -1$, $q_2 = 0$, $q_3 = -1$, $q_4 = -2$.

На основании (10) при выбранных условиях и при действующем значении тока $I = 500$ А и $w = 50$ для силы взаимодействия в среднем во времени получим:

$$F = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} (500)^2 (50)^2}{16} \cdot 0,275 =$$

$$= 42,343 \text{ Н} \cong 4,316 \text{ кгс}.$$

Рассмотрим теперь внешнее расположение соленоидов, показанных на рис. 6, где $a = s_1 + s_2$, и полагая $s_1 = s_2/2$, для a имеем $3s_2/2$. Соотношения $s_2/R_2 = 1,0$, $R_1 = 0,5R_2$ остаются такими же, как в предыдущем расчете по рис. 5.

Воспользуемся выражением П.5 [2] для силы взаимодействия при внешнем расположении (рис. 6), которое не отличается от выражения (10), но с тем различием, что безразмерные величины q записываются в виде:

$$q_1 = \frac{a - s_1 - s_2}{R_2}, \quad q_2 = \frac{a + s_1 - s_2}{R_2},$$

$$q_3 = \frac{a + s_1 + s_2}{R_2}, \quad q_4 = \frac{a - s_1 + s_2}{R_2}.$$

Тогда, в соответствии с рис. 6: $q_1 = 0$, $q_2 = 1,0$, $q_3 = 3$, $q_4 = 2$.

При тех же условиях, при которых производилась оценка сил в соответствии с рис. 5, будем иметь 51,781 Н, или 5,278 кгс. Оценки, полученные в примерах расчета, определялись выбором отношения R_1/R_2 равным 0,5. Вместе с тем важно отме-

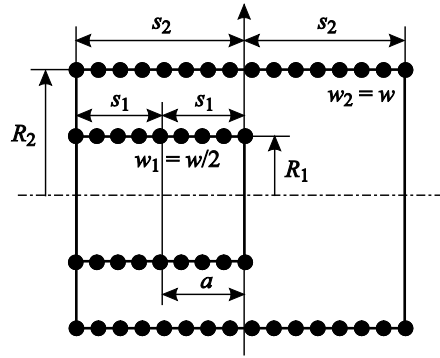


Рис. 5. Внутреннее расположение соленоида 1 с совмещенным торцом

Fig. 5. Solenoid 1: internal arrangement, aligned end

тить, что выражение, стоящее перед квадратной скобкой (10), может быть преобразовано к виду:

$$\frac{\pi\mu_0 i_1 i_2 w_1 w_2}{\left(\frac{2s_1}{R_2}\right)\left(\frac{2s_2}{R_2}\right)} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2, \quad (12)$$

и при неизменных значениях $\frac{2s_1}{R_2}$ и $\frac{2s_2}{R_2}$, токов i_1

и i_2 и витков w_1 и w_2 оценка будет зависеть от отношения R_1/R_2 , включая квадратную скобку в (10). Поэтому выбор отношения R_1/R_2 будет существенно влиять на оценку электродинамической силы.

Действительно полагая, как и в примере для рис. 5, $s_2 = 2s_1$, $w_2 = w$ и $w_1 = 0,5w$, $i_1 = i_2 = i$ с действующим значением $I = 500$ А и имея $q_1 = q_3 = -1$,

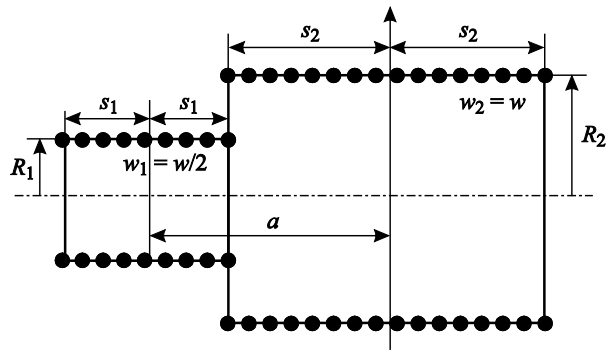


Рис. 6. Внешнее расположение соленоида с совмещенным торцом

Fig. 6. External arrangement of solenoid with aligned end

$q_2 = 0$ и $q_4 = -2$, для выражения перед квадратной скобкой при $R_1 = 0,85R_2$ получим:

$$\frac{4\pi^2 10^{-7} (500)^2 (50)^2}{4} 0,85^2 = 445,674.$$

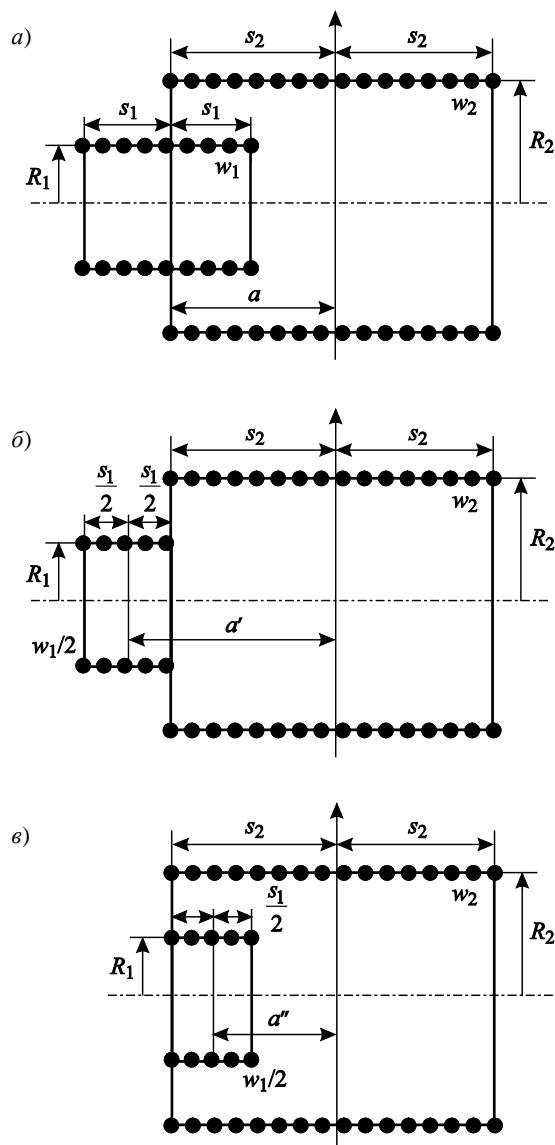


Рис. 7. Симметричное расположение соленоида 1 относительно торца соленоида 2 (а) и его декомпозиция: внешнее расположение (б) и внутреннее расположение (в)

Fig. 7. Symmetric arrangement of Solenoid 1 with respect to the end of Solenoid 2 (a) and its decomposition: external arrangement (b) and internal arrangement (c)

А с учетом выражения в квадратных скобках с оценкой по первым двум членам рядов в (10), равной 0,301, будем иметь 133,926 Н, или 13,652 кгс вместо 4,2376 кгс, как в примере с отношением $R_1 = 0,5R_2$.

При выборе $R_1 = 0,85R_2$ существенно изменится оценка электродинамических сил и для варианта внешнего расположения (рис. 6) Поэтому в конструктивном исполнении нагруженных устройств не следует допускать значительных отклонений, нарушающих симметричное расположение.

Следует отметить, что помимо рассмотренных случаев возможны промежуточные варианты, когда соленоид с геометрическими размерами с индексом 1 оказывается в положении, при котором одна его часть располагается снаружи, а другая – внутри соленоида 2 (рис. 7). В этом случае для расчета электродинамической силы следует проводить расчеты отдельно для частей соленоида, располагающихся вне и внутри соленоида с индексом 2, и результаты сложить.

В качестве примера рассмотрим случай, показанный на рис. 7.

Для внешнего расположения (рис. 7б) получим:

$$q_1' = \frac{a' - \frac{s_1}{2} - s_2}{R_2}, \quad q_2' = \frac{a' + \frac{s_1}{2} - s_2}{R_2},$$

$$q_3' = \frac{a' + \frac{s_1}{2} + s_2}{R_2}, \quad q_4' = \frac{a' - \frac{s_1}{2} + s_2}{R_2},$$

где $a' = \frac{s_1}{2} + s_2$ и, следовательно, при наложении условий $s_1 = 0,5s_2$, $s_2 = R_2$ будем иметь следующие численные значения: $q_1' = 0$, $q_2' = 0,5$, $q_3' = 2,5$, $q_4' = 2,0$.

Размерный множитель (12) в условиях, определенных рис. 7б и рис. 7в, записывается в виде

$$\frac{\pi\mu_0 i^2 \frac{w_1}{2} w_2}{R_1} \frac{R_1}{R_2} = \frac{\pi\mu_0 i^2 w_1 w_2}{8} \left(\frac{2 \frac{s_1}{2}}{R_1} \right) \left(\frac{2s_2}{R_2} \right)$$

По внутреннему расположению (рис. 7в) имеем: $q_1'' = -0,5$, $q_2'' = 0$, $q_3'' = -1,5$, $q_4'' = -2,0$ и

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1,25+0,5}}{\sqrt{1,25}} + \frac{3}{16} 0,5^2 \frac{0,5}{1,25^{5/2}} - 0,5 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1,5^2+1}-3}{\sqrt{1,5^2+1}} +$$

$$+ \frac{3}{16} 0,5^2 \frac{1,5}{(1,5^2+1)^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{16} 0,5^2 \frac{2}{5^{5/2}} = 0,2078.$$

А для внешнего расположения (рис. 7б):

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1,25+0,5}}{\sqrt{1,25}} + \frac{3}{16} 0,5^2 \frac{0,5}{1,25^{5/2}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{7,25}-2,5}{\sqrt{7,25}} +$$

$$+ \frac{3}{16} 0,5^2 \frac{2,5}{(7,25)^{5/2}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{16} 0,5^2 \frac{2,0}{5^{5/2}} = 0,2209.$$

В сумме имеем 0,4287, и тогда результат для средней во времени силы оказывается равным:

$$F = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} (500)^2 \cdot 50 \cdot 25}{8} \cdot 0,4287 =$$

$$= 66,111 \text{ Н} = 6,743 \text{ кгс.}$$

На основании расчетов может быть построена кривая распределения средних во времени сил при принятых условиях (рис. 8).

Сам соленоид с током подвергается воздействию сжимающих сил. Вопрос о сжимающих силах в соленоидах рассмотрен в работе [6].

Как известно, силы сжатия могут быть определены в соответствии с выражением:

$$f_{\text{Сж}} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial l},$$

где L – индуктивность соленоида, l – длина, i – ток соленоида.

Строгое выражение для силы сжатия в соленоиде получено в виде [6]:

$$f_{\text{Сж}} = -\frac{\mu_0 i^2 w^2}{6} \times$$

$$\times \left\{ -2\alpha^{-3} + \frac{(\alpha^2 + 1)^{1/2}}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) E(k) - K(k) \right] \right\}, \quad (13)$$

в котором $K(k)$ и $E(k)$ являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода, $k^2 = (\alpha^2 + 1)^{-1}$ и $\alpha = l/d$, l – длина соленоида, d – его диаметр.

Упрощенное выражение для индуктивности соленоидов дано в [7], и тогда для средней во времени силы сжатия $F_{\text{Сж}}$ будем иметь:

$$F_{\text{Сж}} = -\frac{\mu_0 I^2 w^2 \pi}{8} \left(\frac{l}{d} + 0,44 \right)^{-2}. \quad (14)$$

При $I = 500 \text{ А}$, $l/d = 1,0$ и $w = 50$ получим:

$$F_{\text{Сж}} = -\frac{4\pi^2 \cdot 10^{-7} (500)^2 (50)^2}{8} 0,4287 =$$

$$= 148,739 \text{ Н} = 15,161 \text{ кгс.}$$

Видоизменения выражения (13) даны в [8] с использованием связей сферических функций Лежандра с полуцелым индексом с полными эллиптическими интегралами.

В этом случае сила сжатия $f_{\text{Сж}}$ может быть записана в виде:

$$f_{\text{Сж}} = -\frac{\mu_0 i^2 w^2}{6} \left\{ \frac{3(g+1)}{2^{1/2}(g-1)^{1/2}} Q_{1/2}(g) - \right.$$

$$\left. - \frac{2^{1/2}(g+1)^{1/2}(3g+1)}{g-1} Q_{1/2}^1(g) - 2 \left(\frac{2}{g-1} \right)^{3/2} \right\}, \quad (15)$$

где $g = \frac{2-k^2}{k^2}$, $Q_{1/2}(g)$ и $Q_{1/2}^1(g)$ – функции Лежандра с полуцелым индексом.

Сжимающая сила воздействует на каркас с пазами для катушки соленоидов, и он должен быть выполнен из материала, способного выдерживать значительные нагрузки.

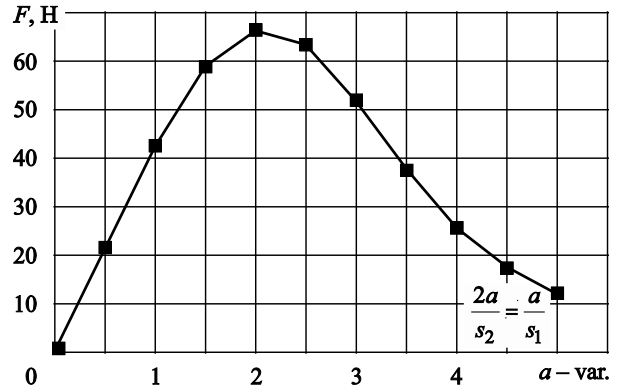


Рис. 8. Кривая для средней во времени силы, действующей на соленоид 1 при токе $I = 500 \text{ А}$ и различном удалении относительно соосного соленоида 2 при $s_1 = 0,5s_2$, $R_1 = 0,5R_2$, $R_2 = s_2$, $R_1 = s_1$ в зависимости от расстояния a между плоскостями симметрии

Fig. 8. Curve of time-averaged force acting on Solenoid 1 under current $I = 500 \text{ А}$ at various distances from coaxial Solenoid 2 with $s_1 = 0,5s_2$, $R_1 = 0,5R_2$, $R_2 = s_2$, $R_1 = s_1$ depending on distance a between symmetry planes

Представленные результаты могут быть использованы и для других практических приложений, где встречаются конструкции соосных соленоидов, когда в результате силового взаимодействия возникает ускорение подвижных частей [10–12].

Список использованной литературы

1. *Калантаров П.А., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей : справочная книга. 3-е изд., перераб. и доп. Ленинград : Энергоатомиздат, 1986. 487, [1] с.
2. *Цицикян Г.Н.* Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров соленоидов и катушек // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. № 6. С. 90–99.
3. *Grover F.W.* Inductance calculations. Working formulas and tables. New York : Van Nostrand, 1946. 286 p.
4. *Цицикян Г.Н., Бобровников П.В., Антипов М.Ю.* Руководство по расчету индуктивностей и электродинамических сил в токоведущих частях электротехнических комплектов. Санкт-Петербург : Крыловский государственный научный центр, 2020. 118 с.
5. *Dwight H.B., Grover F.W.* Some series formulas for mutual inductance of solenoids // Electrical engineering. 1937. March. P. 347–354.
6. *Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю.* Расчет индуктивности однослойного и двухслойного соленоида с учетом особенностей практического применения // Электричество. 2019. № 10. С. 48–53. DOI: 10.24160/0013-5380-2019-10-48-53.
7. *Ramo S., Whinnery J.R., Duzer T. van.* Field and waves in communication electronics. 3rd ed. New York : Wiley, 1994. XIX. 844 p.
8. *Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю.* Строгие и аппроксимирующие выражения для индуктивностей соленоидов круговой и квадратной формы // Электричество. 2020. № 2. С. 35–41. DOI: 10.24160/0013-5380-2020-2-35-41.
9. *Boys T., Elliott G.A.J., Covic G.A.* An Appropriate Magnetic Coupling Co-Efficient for the Design and Comparison of ICPT Pickups // IEEE Transactions on Power Electronics. 2007. Vol. 22, No. 1. P. 333–335. DOI: 10.1109/TPEL.2006.887590.
10. *McKinney K., Mongeau P.* Multiple stage pulsed induction acceleration // IEEE Transactions on Magnetics. 1984. Vol. 20, No. 2. P. 239–242. DOI: 10.1109/TMAG.1984.1063089.
11. On the Design of Coilguns for Super-Velocity Launchers / *A. Balikci, Z. Zabar, L. Birenbaum, D. Czarkowski* //

- IEEE Transactions on Magnetics. 2007. Vol. 43, No. 1. P. 107–110. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887651.
12. Behavior of azimuthal currents induced in the projectile of the linear induction launcher (LIL) / *X.N. Lu, E. Levi, Z. Zabar, L. Birenbaum* // IEEE Transactions on Magnetics. 1993. Vol. 29, No. 1. P. 696–700. DOI: 10.1109/20.195660.

References

1. *Kalantarov P., Tseitlin L.* Calculation of inductances. Reference book. 3rd ed., rev. and enl. Leningrad : Energoatomizdat, 1986 (*in Russian*).
2. *Tsitsikyan G.N.* Mutual inductance and interaction forces of co-axial circuits, solenoids and coils // IZVESTIA AN SSSR. Energy and Transport. No. 6. P. 90–99 (*in Russian*).
3. *Grover F.W.* Inductance calculations. Working formulas and tables. New York : Van Nostrand, 1946. 286 p.
4. *Tsitsikyan G.N., Bobrovnikov P.V., Antipov M.Yu.* Manual on calculation of inductances and electrodynamic forces in live parts of electric engineering packages. St. Petersburg : Krylov State Research Centre, 2020. 118 p. (*in Russian*).
5. *Dwight H.B., Grover F.W.* Some series formulas for mutual inductance of solenoids // Electrical engineering. 1937. March. P. 347–354.
6. *Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.* Inductance calculation for single- and double-layer solenoid taking into account operational specifics // Elektrichestvo (Electricity). 2019. No. 10. P. 48–53 (*in Russian*).
7. *Ramo S., Whinnery J.R., Duzer T. van.* Field and waves in communication electronics. 3rd ed. New York : Wiley, 1994. XIX. 844 p.
8. *Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.* Rigorous and approximating expressions for the inductances of circular and square solenoids // Elektrichestvo (Electricity). 2020. No. 2. P. 35–41. DOI: 10.24160/0013-5380-2020-2-35-41 (*in Russian*).
9. *Boys T., Elliott G.A.J., Covic G.A.* An Appropriate Magnetic Coupling Co-Efficient for the Design and Comparison of ICPT Pickups // IEEE Transactions on Power Electronics. 2007. Vol. 22, No. 1. P. 333–335. DOI: 10.1109/TPEL.2006.887590.
10. *McKinney K., Mongeau P.* Multiple stage pulsed induction acceleration // IEEE Transactions on Magnetics. 1984. Vol. 20, No. 2. P. 239–242. DOI: 10.1109/TMAG.1984.1063089.
11. On the Design of Coilguns for Super-Velocity Launchers / *A. Balikci, Z. Zabar, L. Birenbaum, D. Czarkowski* //

12. Behavior of azimuthal currents induced in the projectile of the linear induction launcher (LIL) / *X.N. Lu, E. Levi, Z. Zabar, L. Birenbaum* // IEEE Transactions on Magnetics. 1993. Vol. 29, No. 1. P. 696–700. DOI: 10.1109/20.195660.

Савченко Олег Владиславович, к.т.н., генеральный директор ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-46-23. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Сведения об авторах

Цицикян Георгий Николаевич, д.т.н., профессор, начальник сектора – заместитель начальника отдела филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 6. Тел.: +7 (812) 748-52-39. E-mail: George.20021940@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8813-6003>.

Антипов Михаил Юрьевич, ведущий инженер филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 6. Тел.: +7 (812) 369-94-91. E-mail: set@sp.ru.

Коровкин Николай Владимирович, д.т.н., профессор, Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Адрес: 195251, Россия, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29. Тел.: +7 (812) 552-75-72. E-mail: korovkin_nv@spbstu.ru.

About the authors

Georgy N. Tsitsikyan, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of Sector – Deputy Head of Department, TSNII SET branch of Krylov State Research Centre. Address: 6, Blagodatnaya st. St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: +7 (812) 748-52-39. E-mail: George.20021940@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8813-6003>.

Mikhail Yu. Antipov, Lead Engineer, TSNII SET branch of Krylov State Research Centre. Address: 6, Blagodatnaya st., St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: +7 (812) 369-94-91. E-mail: set@sp.ru.

Nikolay V. Korovkin, Dr. Sci. (Eng.), Professor, St. Petersburg State Polytechnical University. Address: 29, Politekhnikeskaya st., St. Petersburg, Russia, post code 195251. Tel.: +7 (812) 552-75-72. E-mail: korovkin_nv@spbstu.ru.

Oleg V. Savchenko, Cand. Sci. (Eng.), Director General, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-46-23. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Поступила / Received: 04.04.23
Принята в печать / Accepted: 21.08.23
© Коллектив авторов, 2023