

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-24-39  
УДК [001.891.54:519.6]:624.042.43

А.Р. Филатов<sup>1, 2</sup> 

<sup>1</sup> ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова», Санкт-Петербург, Россия

## ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ БЕССЕТОЧНОГО МЕТОДА СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛЕДОВЫХ НАГРУЗОК

**Объект и цель научной работы.** Объектами исследования являются конструкции морской техники. Цель состоит в оценке перспектив применения бессеточного метода сглаженных частиц (МСЧ) для численного моделирования ледовых нагрузок.

**Материалы и методы.** Для достижения поставленной цели выполнен обзор наиболее популярных методов численного решения задач механики разрушения (метод конечных элементов, расширенный метод конечных элементов, метод сцепляющих элементов, метод дискретных частиц, метод сглаженных частиц и метод частиц Галёркина) с указанием их достоинств и недостатков. Приведены основные соотношения МСЧ.

**Основные результаты.** На примере решения тестовой задачи взаимодействия цилиндрической колонны с ровным ледовым полем получены качественные картины динамики деформирования и процесса разрушения льда в случаях с наличием ледоразрушающих наделок и без, а также реализации глобальной ледовой нагрузки.

**Заключение.** Анализ полученных результатов говорит о перспективности применения МСЧ в формулировке метода скользящих наименьших квадратов (МСНК) для численного моделирования разрушения пластичного (гранулированного) льда и определения соответствующих нагрузок на конструкции морской техники.

**Ключевые слова:** морская техника, ледовые нагрузки, численное моделирование, бессеточные методы, метод сглаженных частиц, SPH, ледоразрушающие наделки.

*Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-24-39  
UDC [001.891.54:519.6]:624.042.43

A.R. Filatov<sup>1, 2</sup> 

<sup>1</sup> Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup> Baltic State Technical University “Voenmekh”

## OUTLOOK FOR APPLICATION OF SMOOTH PARTICLE HYDRODYNAMICS FOR NUMERICAL MODELING OF ICE LOADS

**Object and purpose of research.** The object of research is marine engineering structures. The purpose is to assess the outlook for application of smooth particle hydrodynamics (SPH) for numerical modeling of ice loads.

**Materials and methods.** For this purpose an overview of the most popular methods for numerical solution of problems in fracture mechanics is given with their merits and drawbacks (finite element method, extended finite element method, discrete element method, smooth particle hydrodynamics, smoothed particle Galerkin). Main SPH relations are presented.

**Main results.** A test problem of a cylinder leg interacting with level ice field is used to obtain a qualitative pattern of ice deformation and failure with and without ice breaking arrangements, as well as under the global ice load.

**Conclusion.** Analysis of obtained results shows that SPH in the sliding least square method formulation is promising for numerical modeling of plastic damage in fine grained ice and definition of corresponding loads on marine structures.

**Keywords:** marine structures, numerical modeling, meshless methods, smooth particle hydrodynamics, SPH, ice breaking add-on.

*The author declares no conflicts of interest.*

*Для цитирования:* Филатов А.Р. Перспективы применения бессеточного метода сглаженных частиц для численного моделирования ледовых нагрузок. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 2(400): 24–39.

*For citations:* Filatov A.R. Outlook for application of smooth particle hydrodynamics for numerical modeling of ice loads. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 2(400): 24–39 (in Russian).

## Введение

### Introduction

Интенсивное освоение арктических и субарктических территорий, в частности континентального шельфа и Северного морского пути, стимулирует увеличение объемов строительства судов и добычных платформ ледового класса. В подобных сооружениях предусмотрено наличие ледового пояса, воспринимающего ледовую нагрузку. Локальные значения последней вычисляются согласно п. 3.10 Правил [1] для судов и п. 3.3.2.3 Правил [2] для морских стационарных платформ (МСП).

Помимо локальных ледовых нагрузок, определяющих прочные размеры конструкций ледового пояса, необходимо учитывать и глобальную ледовую нагрузку, поскольку для судов она определяет сопротивление движению, а для МСП – закрепление на грунте и устойчивость к опрокидыванию. И если для платформ глобальная ледовая нагрузка вычисляется согласно тому же п. 3.3.2.3 Правил [2], то для судов подобного пункта в Правилах [1] нет, и на практике проектантам приходится заказывать модельные испытания в ледовом бассейне [3] с последующим пересчетом ледового сопротивления с модели на натурный объект [4–7] (хотя подобные модельные испытания проводят и для МСП [8, 9], а в последнее время и для гидротехнических сооружений [10, 11]). Описанный традиционный подход к определению ледовых нагрузок показан на рис. 1 (см. вклейку).

Очевидным белым пятном в представленной схеме являются модельные испытания в ледовом бассейне, т.к. они, во-первых, дорогостоящие и, во-вторых, неизбежно содержат погрешность, связанную как с масштабным эффектом гидродинамической составляющей сопротивления [12, 13], так и с отсутствием подобия по вибрации и устойчивости льда при сжатии (что коррелирует с отсутствием одновременного подобия льда по модулю упругости, плотности и размерам). Помимо этого, невозможно одновременно промоделировать прочность льда на изгиб и его вязкость разрушения, что приводит к слишком высокому значению критического размера трещины у модельного  $FG$  льда [14].

Еще одно ограничение традиционного подхода состоит в том, что как Правила [1] для судов, так и Правила [2] для платформ содержат методики определения ледовых нагрузок, ориентированные на гладкие наружные поверхности конструкций морской техники. Однако в работе [15] экспериментально установлено, что применение пирами-

дальных ледоразрушающих наделок на корпусе платформ приводит к снижению ледовых нагрузок в 4–8 раз, а уже далее, в работе [16] приводятся экспериментально обоснованные формулы для определения ледовых нагрузок на конструкции с ледоразрушающими наделками нескольких различных форм. Естественно, возникает вопрос оптимизации формы этих наделок с целью уменьшения ледовых нагрузок, но проблема решения подобной задачи заключается в отсутствии формулы для наделки произвольной формы.

Помимо прочего, расчет ледовых нагрузок по Правилам не дает полной картины динамики взаимодействия конструкций со льдом. Такая динамика связана, во-первых, с периодическими и импульсными воздействиями льда, вызывающими колебания конструкций по собственным формам, что отражается на накоплении усталостных повреждений, и во-вторых, с формированием ледяных нагромождений (платформы) и изменением скорости взаимодействия и расположения битого льда относительно конструкций (суда), что в обоих случаях коррелирует с изменениями формы пятна нагрузки и ее величины.

Выход из сложившейся ситуации видится в использовании численных методов для оценки ледовых нагрузок. В работах [17–24] для моделирования ударных ледовых нагрузок на корпус судна и определения его прочности, ходкости и управляемости в битых льдах, а также оценки ледовых качеств гребных винтов используется метод конечных элементов (МКЭ), являющийся самым распространенным для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Процесс разрушения льда в указанных работах моделируется с помощью эрозии конечных элементов (КЭ), т.е. путем их удаления при достижении заданного критерия, что фактически соответствует разрыхлению материала, а не его хрупкому разрушению. При этом очевидными недостатками подобного подхода являются, во-первых, зависимость решения от КЭ сетки и, во-вторых, нарушение законов сохранения (массы, импульса и энергии).

Для моделирования образования новых развитых свободных поверхностей в процессе разрушения материала без технологии эрозии КЭ был разработан расширенный МКЭ (РМКЭ) [25]. В нем используется концепция разделения целого элемента, включающая в аппроксимацию МКЭ локальные функции обогащения, что позволяет моделировать поверхности разрушения по любым путям относительно КЭ сетки без необходимости

ее перестроения [26]. Основным минусом данного метода является необходимость наличия первоначального дефекта (первоначальной трещины). Помимо этого, РМКЭ является вычислительно сложным и трудно сходящимся при наличии большого числа трещин.

Вместо МКЭ и РМКЭ исследователи предпринимают попытки решения задач разрушения льда с помощью альтернативных методов (например, метода сцепляющих элементов (МСЭ), апробированного в серии работ [27–30]), содержащих численное моделирование испытаний образцов льда на сжатие и изгиб, а также численное моделирование ледового сопротивления судна. МСЭ основан на добавлении в МКЭ сцепляющих элементов околонулевой толщины, связывающих отдельные КЭ или даже блоки КЭ. При этом разрушение материала по достижении заданного критерия происходит именно по сцепляющим элементам.

Достоинствами такого подхода являются, во-первых, сохранение всех КЭ в процессе решения (в отличие от МКЭ с технологией эрозии КЭ), во-вторых, отсутствие необходимости наличия начального дефекта в конструкции (в отличие от РМКЭ) и, в-третьих, относительно низкая вычислительная сложность. Основным недостатком заключается в сеточной зависимости размеров и формы осколков льда, а также направлений его разрушения, поскольку последнее предусмотрено только по сцепляющим элементам.

В работе [31] для численного моделирования воздействия битого льда на заякоренные объекты используется метод дискретных частиц (МДЧ). Его преимуществом является простота описания динамики взаимодействия как конструкций с битым льдом, так и осколков льда между собой. При этом имеется возможность формирования осколков льда в виде двумерных дисков или трехмерных шаров случайных размеров в заданных пределах. Основные недостатки МДЧ состоят в чувствительности механизма разрушения льда к таким параметрам частиц, как их диаметр (в особенности отношение характерного размера ледового образца к размеру частиц), нормальная и сдвиговая жесткости, а также прочность сцепления на растяжение и сдвиг, что подробно описано в работе [32].

За последнее десятилетие активизировались работы по моделированию льда бессеточными методами, в частности методом сглаженных частиц (МСЧ). В работе [33] с использованием МСЧ численно моделируется четырехточечный изгиб ледового образца. В работе [34] с помощью модифицированного

МСЧ численно моделируется как четырехточечный изгиб, так и сжатие ледового образца с последующим сопоставлением результатов расчетов с экспериментом. В работе [35] на примере испытаний ледового образца на трехточечный изгиб калибруются параметры модели льда, используемой в МСЧ, а затем выполняется моделирование взаимодействия наклонного сооружения с ровным льдом как на упругом основании, так и с учетом воды.

В работе [36] авторы также сначала на примере трехточечного изгиба ледового образца калибруют параметры модели льда в МСЧ, после чего проводят сопоставление результатов численного расчета и модельного эксперимента взаимодействия ровного льда с наклонным сооружением, а уже затем выполняют численное моделирование прохода судна по ровному ледовому полю. Основные достоинства МСЧ заключаются в отсутствии сетки и, как следствие, сеточной зависимости результатов расчетов. Здесь пути разрушения льда возникают естественным образом, а наличие начального дефекта не требуется. При этом, хотя качественная картина разрушения льда не зависит от конфигурации частиц, минимальные размеры осколков льда зависят от размеров частиц, т.е. от степени дискретизации.

Основным недостатком МСЧ является неустойчивость растяжения, при которой разрушение происходит не по физическим критериям, а из-за потери видимости соседними частицами друг друга вследствие слишком больших деформаций. Попытка исправления данного недостатка выполнена путем симметризации уравнений МСЧ и модификации его формулировки с использованием метода скользящих наименьших квадратов (МСНК) [37]. Также в МСЧ имеется проблема строгого удовлетворения граничных условий (ГУ). Помимо этого, МСЧ подвержен наличию паразитных собственных колебаний с нулевой энергией, что является следствием аппроксимации как значений поля, так и его производных в одних и тех же точках.

Указанные недостатки МСЧ, накладывающие ограничения на его применение для моделирования разрушения твердых тел, стимулировали разработку альтернативного бессеточного метода – метода частиц Галёркина (МЧГ) [38]. Во избежание паразитных колебаний в МЧГ вводится сглаживание узловых перемещений, а за разрушение отвечает обнуление сглаженной функции формы, выполняющееся на основе феноменологической модели разрушения (достижение предельных деформаций

или напряжений), что позволило полностью исключить неустойчивость растяжения [39, 40]. Сопоставление результатов численного моделирования глобальных ледовых нагрузок на опорную колонну МСП, полученных с помощью МСЧ и МЧГ, выполнено в работе [41].

Указанные достоинства и недостатки всех перечисленных методов приведены в табл. 1, среди которых бессеточные методы МСЧ и МЧГ представляются самыми перспективными для оценки ледовых нагрузок. За дополнительной информацией по численному моделированию ледовых нагрузок можно обратиться к отечественным обзорам [42, 43] или к исчерпывающему зарубежному обзору [44].

Целью настоящей работы является оценка перспектив применения бессеточного метода сглажен-

ных частиц для численного моделирования ледовых нагрузок. Для достижения поставленной цели выполнена численная оценка глобальных ледовых нагрузок от ровного ледового поля на цилиндрическую колонну (в случаях с наличием ледоразрушающих наделок и без) как методом сглаженных частиц, так и методом конечных элементов с последующим сопоставлением результатов.

## Основы метода сглаженных частиц

### Basics of smooth particle hydrodynamics

Оригинальный МСЧ был разработан в 1977 г. в работе Л.Б. Люси [45], а также в работе Р.А. Гингольда и Дж. Дж. Монагана [46]. Его основная идея состоит в том, что для вычисления значения функ-

**Таблица 1.** Достоинства и недостатки различных методов численного моделирования ледовых нагрузок  
**Table 1.** Advantages and disadvantages of various methods for numerical modeling of ice loads

| Метод                          | Достоинства  | Недостатки  | Возможное применение  |
|--------------------------------|--|---|---|
| МКЭ/<br>FEM с<br>эрозией<br>КЭ | <ul style="list-style-type: none"> <li>Простота постановки задачи</li> <li>Низкая вычислительная сложность</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Сеточная зависимость</li> <li>Нарушение законов сохранения</li> <li>Разрыхление вместо хрупкого разрушения</li> </ul>  | Моделирование разрушения бетонных конструкций и конструкций из пластичных сплавов   |
| РМКЭ/<br>XFEM                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Сеточная независимость</li> <li>Соблюдение законов сохранения</li> <li>Соответствие физике хрупкого разрушения</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Требуется наличие первоначальной трещины</li> <li>Высокая вычислительная сложность</li> <li>Проблемы со сходимостью при большом числе трещин</li> </ul>  | Моделирование ровного ледового поля для оценки локальных ледовых нагрузок на платформы с ледоразрушающими наделками   |
| МСЭ/<br>CZM                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Соблюдение законов сохранения</li> <li>Средняя вычислительная сложность</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Сеточная зависимость</li> </ul>  | Моделирование ровного ледового поля для оценки глобальной ледовой нагрузки на платформы без ледоразрушающих наделок   |
| МДЧ/<br>DEM                    |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Зависимость от функции распределения размеров частиц</li> <li>Высокая чувствительность результатов расчетов к параметрам материала и критериям его разрушения</li> </ul>                                   | Моделирование битого льда как для оценки ледового сопротивления судов, так и для оценки процесса формирования ледовых нагромождений у платформ                |
| МСЧ/<br>SPH                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Сеточная независимость</li> <li>Соблюдение законов сохранения</li> <li>Средняя вычислительная сложность</li> </ul>        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Неустойчивость растяжения (попытка исправления в МСЧ-МСНК)</li> <li>Паразитные собственные колебания</li> <li>Проблема строгого удовлетворения ГУ (требуется наложение ГУ на пограничный объем)</li> </ul> | Моделирование ровного льда для оценки локальных и глобальных ледовых нагрузок на конструкции судов и платформ как с ледоразрушающими наделками, так и без них |
| МЧГ/<br>SPG                    |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Проблемы со сходимостью при самоконтакте</li> </ul>  |   |

ции  $f_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $\vec{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$  пространства можно воспользоваться формулой

$$f_t(\vec{r}) = \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \delta(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega, \quad (1)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}; \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1. \quad (3)$$

Поскольку дельта-функцию (2) невозможно использовать в численных расчетах, нельзя использовать и формулу (1). Вместо этого для оценки  $\hat{f}_t$  функции в точке  $\vec{r}$  используют приближенную формулу

$$\hat{f}_t(\vec{r}) = \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega, \quad (4)$$

где  $w_h: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  – весовая (сглаживающая) функция, которую также называют ядром или керна-функцией, имеющая компактный носитель

$$w_h(x) = 0 \text{ при } x > kh \quad (5)$$

и удовлетворяющая условию нормировки (3)

$$\forall h > 0: \int_{\Omega} w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = 1, \quad (6)$$

причем  $\lim_{h \rightarrow +0} w_h(x) = \delta(x)$ ;  $h$  – характерный размер ядра сглаживания;  $k$  – некоторая константа (обычно  $1 \leq k \leq 2$ ).

Производная скалярной функции  $f_t$  по направлению  $\vec{x}_i$  вычисляется по аналогии с (4):

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla_{x_i} f_t}(\vec{r}) &= \int_{\Omega} [\nabla_{x_i} f_t(\vec{\xi})] w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \nabla_{x_i} [f_t(\vec{\xi}) w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|)] d\Omega - \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \nabla_{x_i} [w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|)] d\Omega = \\ &= \int_{S=\partial\Omega} f_t(\vec{\xi}) w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) \vec{x}_i \cdot d\vec{S} - \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где последовательно использованы интегрирование по частям, формула Грина и тот факт, что сглаживающая функция  $w_h$  имеет компактный носитель

и равна нулю на границе  $S = \partial\Omega$  расчетной области в силу (5). Поскольку  $\nabla f = \sum_i \vec{i} \nabla_{x_i} f$ , из (7) следует

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla f_t}(\vec{r}) &= - \sum_i \vec{i} \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \sum_i \vec{i} \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} f_t(\vec{\xi}) \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулу (8) можно симметризовать, воспользовавшись равенством  $\nabla f_t = \nabla(\rho f_t) - f_t \nabla \rho$ , где  $\rho$  – плотность материала, откуда следует

$$\begin{aligned} \rho \widehat{\nabla f}(\vec{r}) &= - \int_{\Omega} \rho(\vec{\xi}) f_t(\vec{\xi}) \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega + \\ &+ f_t(\vec{r}) \int_{\Omega} \rho(\vec{\xi}) \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho(\vec{\xi}) [f_t(\vec{r}) - f_t(\vec{\xi})] \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисление дивергенции векторного (или тензорного) поля  $\vec{f}_t$  выполняется аналогично (4):

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla \cdot \vec{f}_t}(\vec{r}) &= \int_{\Omega} [\nabla \cdot \vec{f}_t(\vec{\xi})] w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [\vec{f}_t(\vec{\xi}) w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|)] d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_t(\vec{\xi}) \cdot \nabla [w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|)] d\Omega = \\ &= \int_{S=\partial\Omega} \vec{f}_t(\vec{\xi}) w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) \cdot d\vec{S} - \int_{\Omega} \vec{f}_t(\vec{\xi}) \cdot \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \vec{f}_t(\vec{\xi}) \cdot \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

где последовательно использованы интегрирование по частям, формула Остроградского – Гаусса и также тот факт, что сглаживающая функция  $w_h$  равна нулю на границе  $S = \partial\Omega$  расчетной области в силу (5).

Возьмем для примера в качестве иско-мой функции постоянную  $f_t = c$ . Тогда с учетом свойства (6) сглаживающей функции

$$\begin{aligned} \forall \vec{r} \in \Omega: \\ \hat{f}_t(\vec{r}) &= \int_{\Omega} c w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = c \int_{\Omega} w_h(\|\vec{r} - \vec{\xi}\|) d\Omega = c, \end{aligned}$$

т.е. аппроксимация (4) обеспечивает нулевой порядок совместимости. Однако это верно всюду, кроме границы  $\partial\Omega$  расчетной области, где значения функции  $w_h$  по построению равны нулю. Отсюда в МСЧ вытекает проблема строгого удовлетворения ГУ.

Запишем дискретные аналоги формулы (4) для значения функции, формулы (7) для частной производной и формулы (9) для градиента:

$$\begin{aligned} \hat{f}_t(\vec{r}) &\approx \sum_j f_t(\vec{r}_j) w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|) \Delta V_j = \\ &= \sum_j f_t(\vec{r}_j) \frac{m_j}{\rho_j} w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|) = \{f_t\}^T \left[ \text{diag} \frac{m}{\rho} \right] \{w_h(\vec{r})\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla_{x_i} f_t}(\vec{r}) &\approx -\sum_j f_t(\vec{r}_j) \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|) \Delta V_j = \\ &= -\sum_j f_t(\vec{r}_j) \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|) = \\ &= \{f_t\}^T \left[ \text{diag} \frac{m}{\rho} \right] \{\nabla_{x_i} w_h(\vec{r})\}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla f_t}(\vec{r}) &\approx \frac{1}{\rho(\vec{r})} \sum_j \rho_j [f_t(\vec{r}) - f_t(\vec{r}_j)] \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|) \Delta V_j = \\ &= \frac{1}{\rho(\vec{r})} \sum_j [f_t(\vec{r}) - f_t(\vec{r}_j)] m_j \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|) = \\ &= \frac{\{\Delta f_t(\vec{r})\}^T [\text{diag} m] [\nabla w_h(\vec{r})]}{\rho(\vec{r})}, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \{w_h(\vec{r})\}^T &= \{w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_1\|) \quad w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_2\|) \quad \dots\}; \\ \{\nabla_{x_i} w_h(\vec{r})\}^T &= \{\nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_1\|) \quad \nabla_{x_i} w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_2\|) \quad \dots\}; \\ [\nabla w_h(\vec{r})] &= \begin{bmatrix} \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_1\|) \\ \nabla w_h(\|\vec{r} - \vec{r}_2\|) \\ \vdots \end{bmatrix}; \\ \left[ \text{diag} \frac{m}{\rho} \right] &= \begin{bmatrix} \frac{m_1}{\rho_1} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{m_2}{\rho_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \\ [\text{diag} m] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots \\ 0 & m_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\{f_t\}^T = \{f_t(\vec{r}_1) \quad f_t(\vec{r}_2) \quad \dots\};$$

$$\{\Delta f_t(\vec{r})\}^T = \{f_t(\vec{r}) - f_t(\vec{r}_1) \quad f_t(\vec{r}) - f_t(\vec{r}_2) \quad \dots\};$$

Сглаживающая функция  $w_h/C$

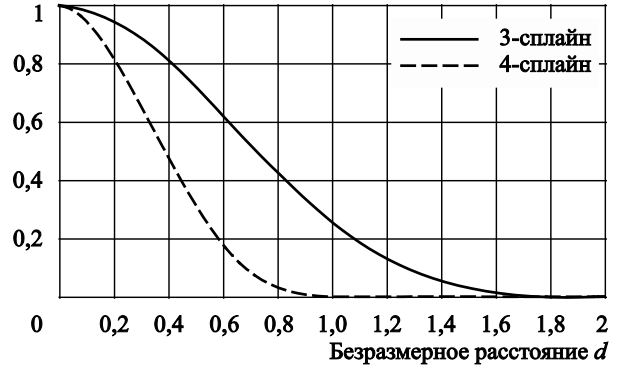


Рис. 2. Графики сглаживающих функций  
Fig. 2. Graphs of smoothening functions

$\vec{r}_j$  – точки пространства (частицы), в которых известны значения функции  $f_j$ ;  $m_j$  и  $\rho_j$  – соответственно масса и плотность частиц;  $\rho(\vec{r})$  – плотность в искомой точке  $\vec{r}$  пространства, которую можно вычислить по формуле (11):

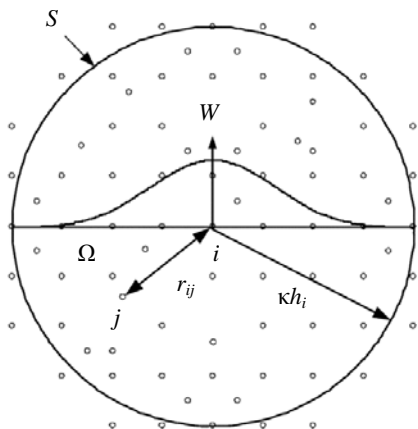
$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \{\rho\}^T \left[ \text{diag} \frac{m}{\rho} \right] \{w_h(\vec{r})\} = \{m\}^T \{w_h(\vec{r})\}. \quad (14)$$

Как видно, в МСЧ вычисление частных производных и градиента искомой функции заменяется вычислением производных и градиента сглаживающей функции, в качестве которой одними из первых были предложены 4-сплайн [45] и 3-сплайн [47] (последний используется в программном комплексе LS-DYNA):

$$w_h^4(d) = C_4 \begin{cases} (1+3d)(1-d)^4 & 0 \leq d < 1, \\ 0 & d \geq 1 \end{cases}, \quad (15)$$

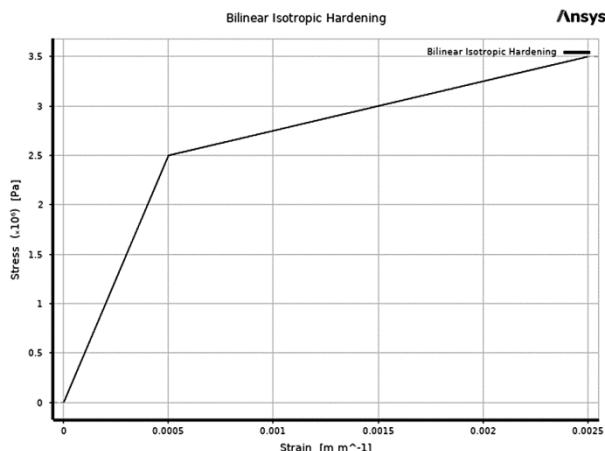
$$w_h^3(d) = C_3 \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}d^2 + \frac{3}{4}d^3 & 0 \leq d < 1 \\ 0,25(1-d)^3 & 1 \leq d < 2, \\ 0 & d \geq 2 \end{cases}, \quad (16)$$

где  $d = \frac{\|\vec{r} - \vec{r}_j\|}{h}$  – безразмерное расстояние;  $C_n$  – нормирующие множители ( $C_3 = 2/3$  для 1D,  $10/7\pi$  для 2D и  $1/\pi$  для 3D;  $C_4 = 5/4$  для 1D,  $5/\pi$  для 2D и  $105/16\pi$  для 3D). Можно убедиться, что оба варианта сглаживающих функций являются  $C^2$  гладкими. Их графики показаны на рис. 2.



**Рис. 3.** Аппроксимация сглаженными частицами значений поля в плоской задаче [48]

**Fig. 3.** Approximation of field values in 2D problem using SPH [48]



**Рис. 7.** Диаграмма растяжения модели льда

**Fig. 7.** Diagram of tension ice model

**Таблица 2.** Модели и свойства материала

**Table 2.** Models and material properties

|                             | Опорная колонна                  | Ледовое поле  |
|-----------------------------|----------------------------------|---|
| Материал                    | Сталь                            | Пластичный лед  |
| Плотность $\rho$            | 7850 кг/м <sup>3</sup>           | 900 кг/м <sup>3</sup>   |
| Модель                      | Линейная упругая                 | Линейная упругая +<br>линейное изотропное упрочнение                        |
| Модуль Юнга $E$             | 206 ГПа [1]                      | 5 ГПа   |
| Коэффициент Пуассона $\nu$  | 0,3                              | 0,33  |
| Предел текучести $\sigma_y$ | –                                | 2,5 МПа   |
| Касательный модуль $E_T$    | –                                | 500 МПа   |
| Критерии разрушения:        | $\sigma_{\max}$<br>$\tau_{\max}$ | Нормальное напряжение 4 Мпа [49]<br>Касательное напряжение $4/\sqrt{3}$ МПа |

Вся расчетная область  $\Omega$  заполняется частицами (рис. 3), а вычисление значений поля в  $i$ -й частице  $\bar{r}_i$  выполняется по формулам (11)–(13).

## Результаты и обсуждение

### Results and discussion

Для тестовых расчетов была выбрана задача взаимодействия цилиндрической опорной колонны диаметром 2 м с ровным ледовым полем толщиной 0,5 м, движущимся со скоростью 1,5 м/с (5,4 км/ч). Рассмотрены три вида колонн: гладкая (рис. 4а, см. вклейку), с пирамидальными наделками (рис. 4б) и с кольцевой наделкой (рис. 4в) [16].

В задаче моделировалась часть ледового поля размером 13×13 м. В качестве начальных условий использовалась скорость движения ледового поля (рис. 5, см. вклейку). В качестве граничных условий (ГУ) использовались (рис. 6, см. вклейку):

- жесткая заделка нижней кромки опорной колонны;
- скорость на границе рассматриваемой части ледового поля.

Помимо этого, было задано ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Расчетное время составляло 1 с.

В табл. 2 приведены используемые в задачах модели и свойства материалов опорной колонны и ледового поля. Диаграмма растяжения модели льда показана на рис. 7. Между льдом и колонной был задан контакт с трением (коэффициент трения по кося был принят равным 0,01).

В тестовых задачах использовались следующие формулировки МСЧ [50]:

- симметричная постановка с перенормировкой (symmetric renormalized approximation);

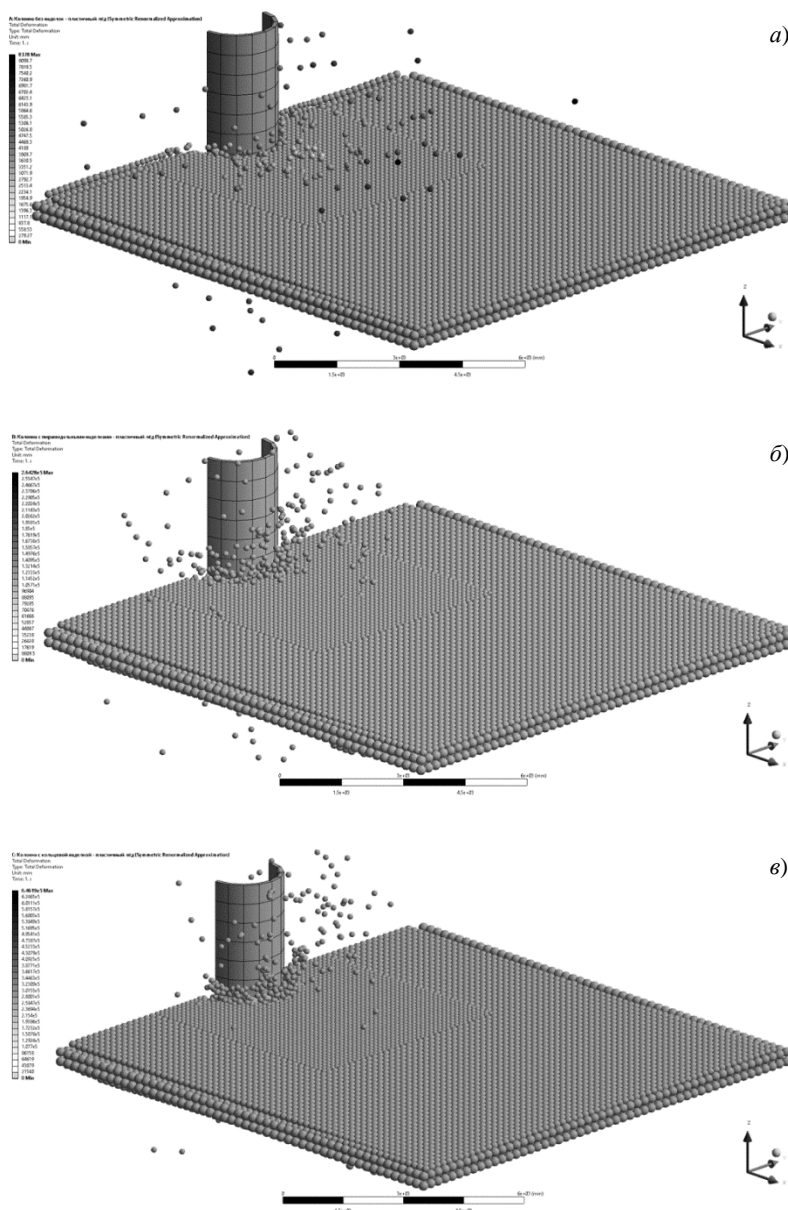
- лагранжева постановка с перенормировкой (total Lagrangian formulation with renormalization);
- МСНК (moving least-squares based formulation).

На рис. 8–11 показаны поля полных перемещений при времени  $t = 1,0$  с в симметричной постановке МСЧ, лагранжевой постановке МСЧ, МСЧ-МСНК и МКЭ соответственно.

На рис. 12–15 (см. вклейку) показаны реализации полной опорной реакции колонны в симметричной постановке МСЧ, лагранжевой постановке МСЧ, МСЧ-МСНК и МКЭ соответственно. В табл. 3 при-

ведены максимальные расчетные значения полной опорной реакции для всех рассмотренных формулировок МСЧ, а также для МКЭ.

Как видно, в симметричной постановке МСЧ наличие ледоразрушающих наделок приводит к увеличению глобальной ледовой нагрузки, что не нашло подтверждения ни в экспериментах [15, 16], ни при численном моделировании в оставшихся формулировках МСЧ. Поэтому данная постановка не подходит для численной оценки ледовых нагрузок.



**Рис. 8.** Метод сглаженных частиц в симметричной постановке с перенормировкой. Поле полных перемещений при времени  $t = 1,0$  с: а) без наделок; б) с пирамидальными наделками; в) с кольцевой наделкой

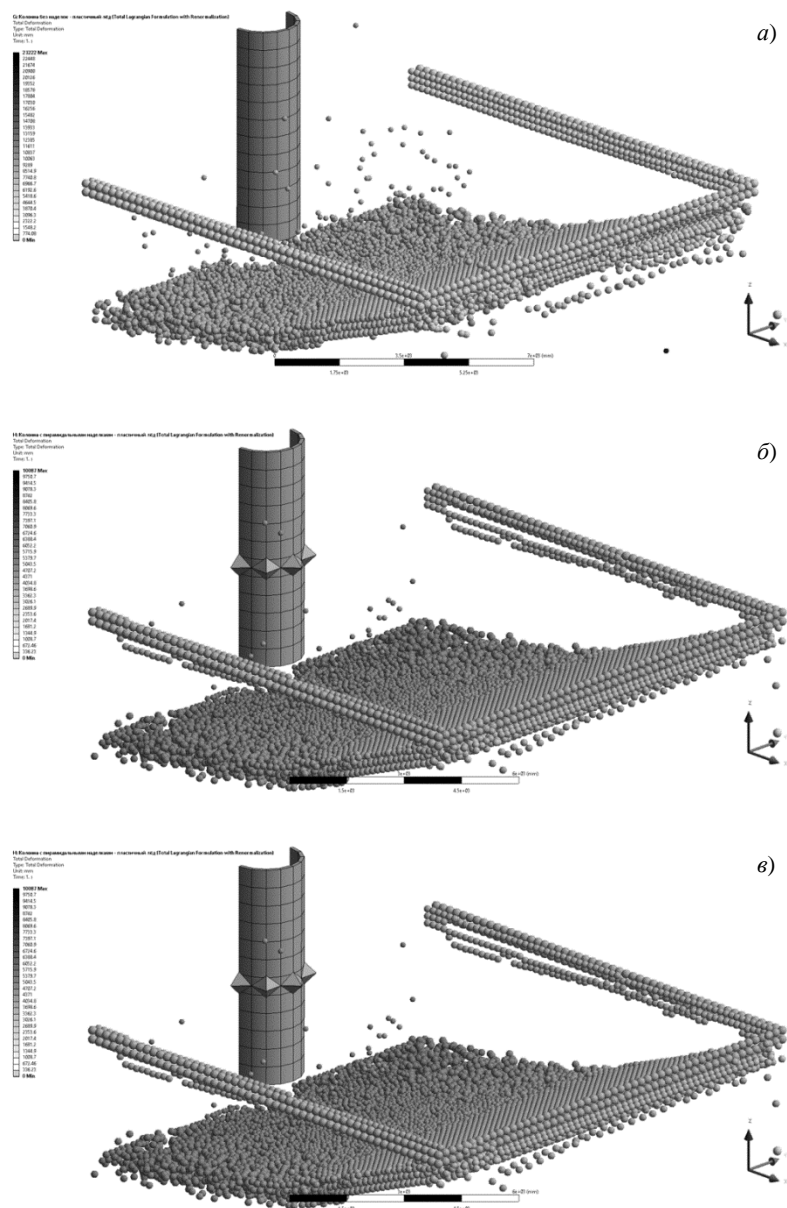
**Fig. 8.** Smooth particle hydrodynamics in symmetrical formulation with renorming. Field of full displacements at time  $t = 1.0$  s: а) without add-ons; б) with tapered add-ons; в) with ring add-on



В лагранжевой постановке МСЧ во всех случаях наблюдается разрушение рассматриваемой части ледового поля по ее границе (отлом от граничных частиц, на которые наложены кинематические ГУ), что представляется нефизичным. Основное предназначение данной постановки – моделирование сверхвысоких деформаций (в т.ч. пластических), например, у металлов или резины, но не моделирование разрушения материала. Поэтому и эта постановка не подходит для численной оценки ледовых нагрузок.

В формулировке МСЧ-МСНК наблюдается качественное соответствие результатов расчетов с экспериментом: наличие ледоразрушающих наделок приводит к снижению глобальной ледовой нагрузки в 3–4 раза. Поэтому данная формулировка МСЧ рекомендуется для численного моделирования ледовых нагрузок в первую очередь.

Использование МКЭ для моделирования разрушения льда аналогично симметричной постановке МСЧ показало существенное увеличение глобальной ледовой нагрузки в случае использо-



**Рис. 9.** Метод сглаженных частиц в лагранжевой постановке с перенормировкой. Поле полных перемещений при времени  $t = 1,0$  с: а) без наделок; б) с пирамидальными наделками; в) с кольцевой наделкой

**Fig. 9.** Smooth particle hydrodynamics in Langrangian formulation with renorming. Field of full displacements at time  $t = 1.0$  s: a) without add-ons; b) with tapered add-ons; c) with ring add-on

вания пирамидальных ледоразрушающих наделок, что, как было отмечено выше, идет вразрез с результатами экспериментов. Стоит отметить, что глобальная ледовая нагрузка, полученная с помощью МКЭ, оказалась в разы выше, чем полученная с помощью МСЧ.

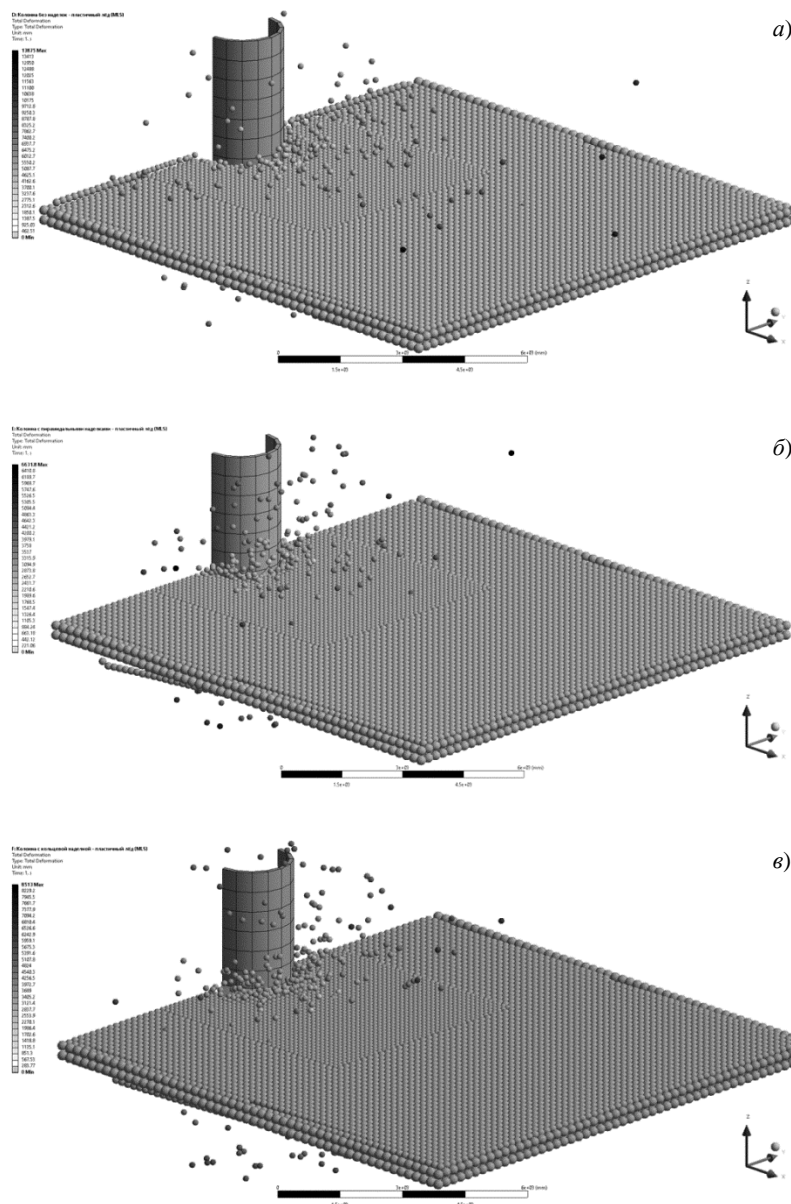
В целом, тестовая задача позволила выявить скачки нагрузки при боковом воздействии ледового поля на пирамидальные наделки, что представляется вполне рациональным и влечет за собой проблему обеспечения поперечной (траверсной) прочно-

сти подобных наделок. Помимо этого, из-за неравномерности воздействия льда на пирамидальные наделки наблюдаются крутильно-изгибные колебания опорной колонны, что также должно быть учтено при их использовании.

## Заключение

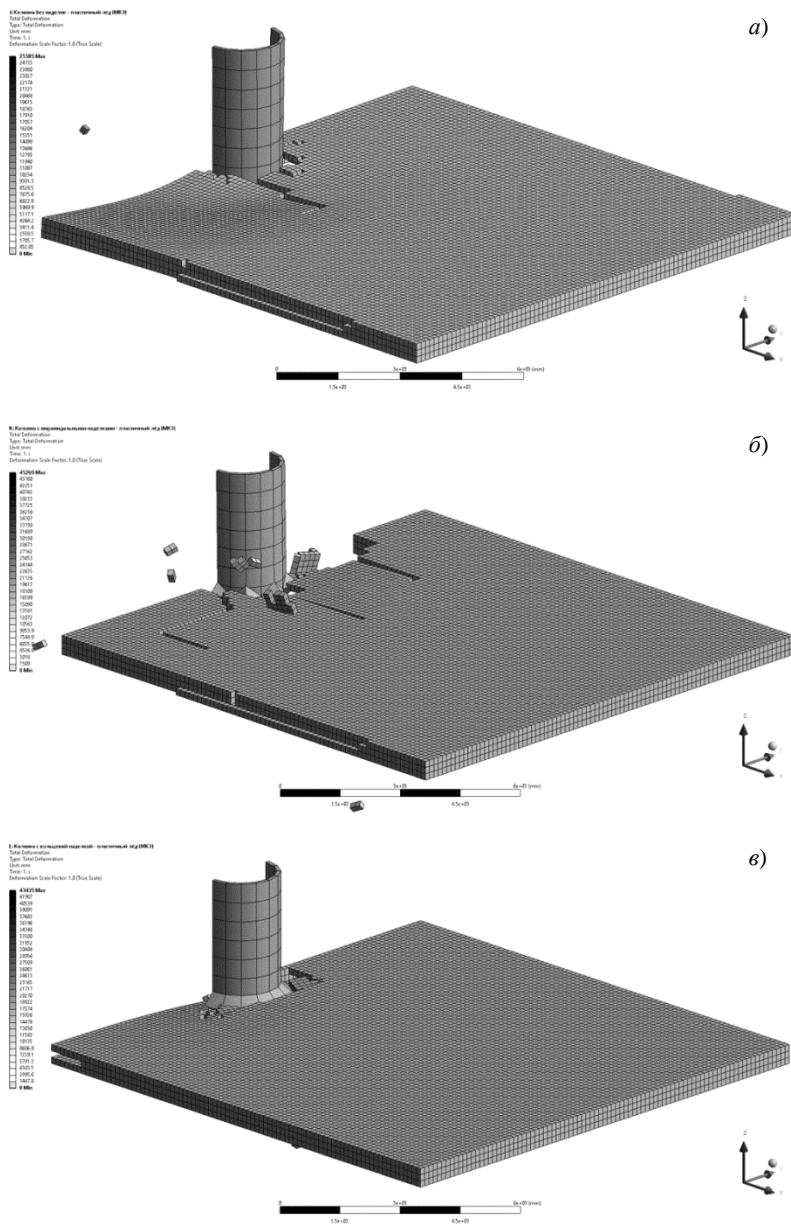
### Conclusion

Выполненный обзор наиболее распространенных методов численной оценки ледовых нагрузок поз-



**Рис. 10.** Метод сглаженных частиц – метод скользящих наименьших квадратов. Поле полных перемещений при времени  $t = 1,0$  с: а) без наделок; б) с пирамидальными наделками; в) с кольцевой наделкой

**Fig. 10.** Smooth particle hydrodynamics – sliding least square method formulation. Field of full displacements at time  $t = 1.0$  s: а) without add-ons; б) with tapered add-ons; в) with ring add-on



**Рис. 11.** Метод конечных элементов. Поле полных перемещений при времени  $t = 1,0$  с:  
 а) без наделок;  
 б) с пирамидальными наделками;  
 в) с кольцевой наделкой

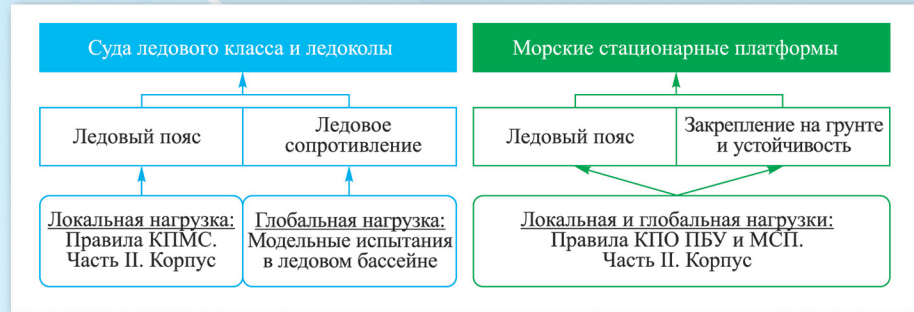
**Fig. 11.** Finite element method. Field of full displacements at time  $t = 1.0$  s:  
 a) without add-ons;  
 b) with tapered add-ons;  
 c) with ring add-on

**Таблица 3.** Максимальные значения полной опорной реакции, МН  
**Table 3.** Maximum full support reaction, MN

| Вариант конструкции   | Симметричная постановка | Лагранжева постановка | МСНК          | МКЭ           |
|-----------------------|-------------------------|-----------------------|---------------|---------------|
| Без наделок           | 3,152 (100 %)           | 2,812 (100 %)         | 3,597 (100 %) | 7,419 (100 %) |
| Пирамидальные наделки | 8,034 (255 %)           | 0,744 (26 %)          | 1,062 (30 %)  | 11,53 (155 %) |
| Кольцевая наделка     | 4,283 (136 %)           | 0,754 (27 %)          | 1,032 (29 %)  | 5,792 (70 %)  |

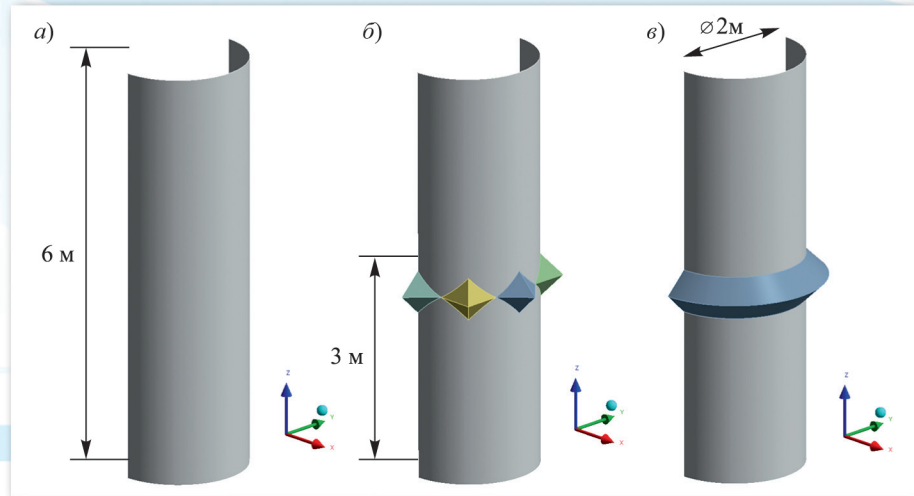
**Рис. 1.** Традиционный подход к определению ледовых нагрузок для судов и морских стационарных платформ ледового класса

**Fig. 1.** Traditional approach to definition of ice loads on ships and fixed offshore platforms of ice class



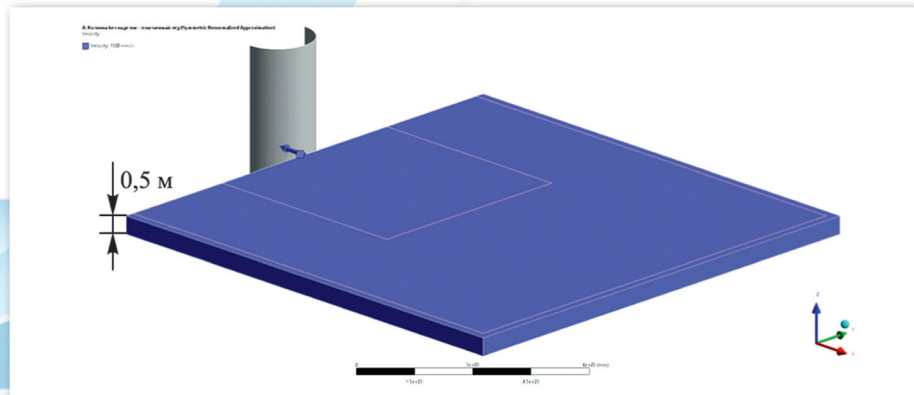
**Рис. 4.** Опорные колонны: а) гладкая; б) с пирамидальными наделками; в) с кольцевой наделкой

**Fig. 4.** Support legs: а) smooth; б) with tapered add-ons; в) with ring add-on



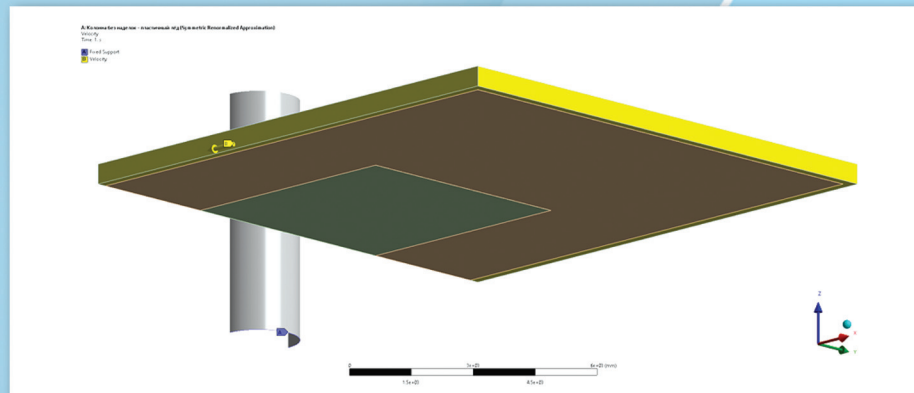
**Рис. 5.** Взаимное расположение опорной колонны и ледового поля в начальный момент времени

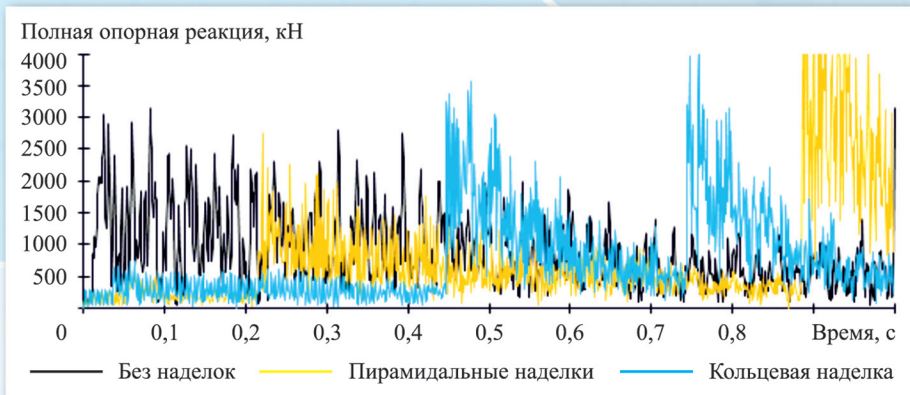
**Fig. 5.** Mutual positions of leg and ice field in the initial instant



**Рис. 6.** Граничные условия: жесткая заделка нижней кромки колонны и скорость на границе ледового поля

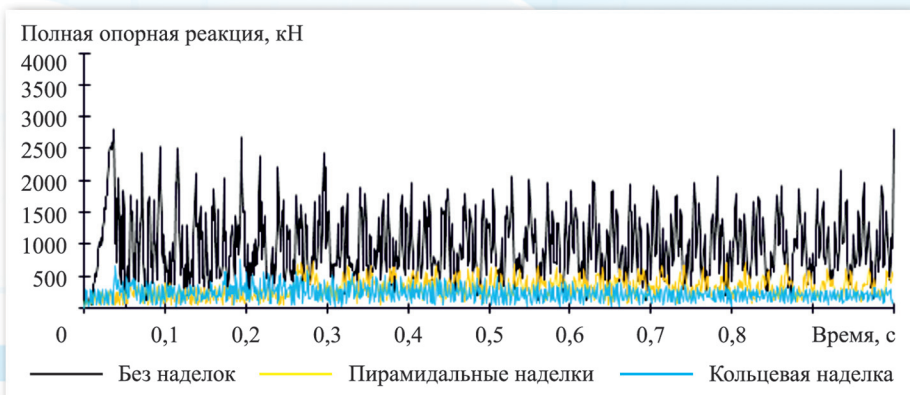
**Fig. 6.** Boundary conditions: fixed bottom edge of leg and velocity at ice field boundary





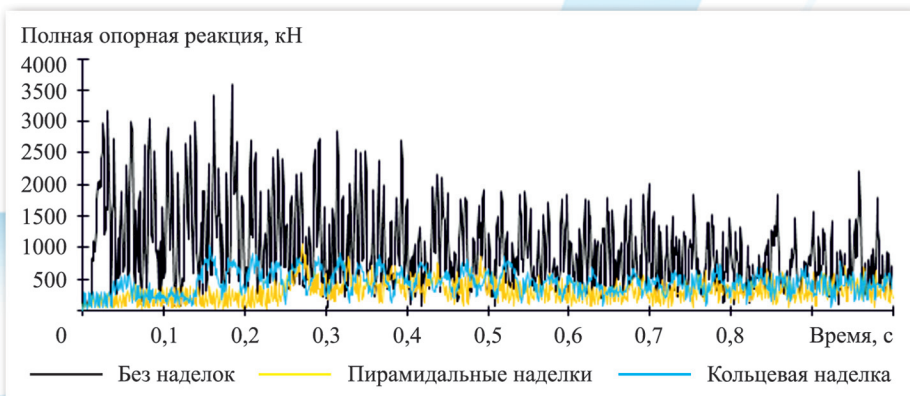
**Рис. 12.** Метод сглаженных частиц в симметричной постановке с перенормировкой. Реализации опорной реакции колонны

**Fig. 12.** Smooth particle hydrodynamics in symmetrical formulation with renorming. Time history of leg support reaction



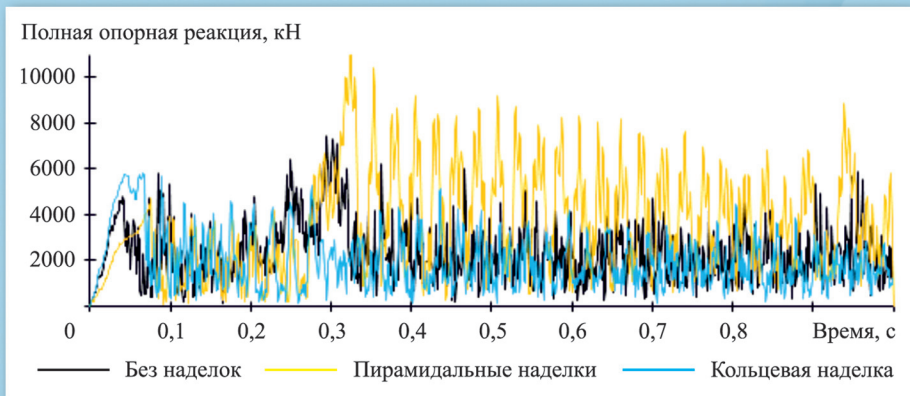
**Рис. 13.** Метод сглаженных частиц в лагранжевой постановке с перенормировкой. Реализации опорной реакции колонны

**Fig. 13.** Smooth particle hydrodynamics in Langrangian formulation with renorming. Time history of leg support reaction



**Рис. 14.** Метод сглаженных частиц с методом скользящих наименьших квадратов. Реализации опорной реакции колонны

**Fig. 14.** Smooth particle hydrodynamics – sliding least square method formulation. Time history of leg support reaction



**Рис. 15.** Метод конечных элементов. Реализации опорной реакции колонны

**Fig. 15.** Finite element method. Time history of leg support reaction



волил выявить перспективность применения бессточных методов, в частности МСЧ и МЧГ, как более всего подходящих для моделирования разрушения льда.

На примере тестовых задач взаимодействия опорной колонны с ровным ледовым полем выявлено качественное совпадение с экспериментом результатов численного моделирования ледовых нагрузок в постановке МСЧ-МСНК при наличии ледоразрушающих наделок. При этом как симметричная и лагранжева постановки МСЧ, так и МКЭ показали результаты, противоречащие экспериментам.

В ходе решения тестовых задач выявлено скачкообразное увеличение ледовых нагрузок при боковом воздействии льда на пирамидальные наделки, что приводит к проблеме обеспечения поперечной (траверсной) прочности подобных наделок, а также к возникновению крутильно-изгибных колебаний колонны. Подобные эффекты следует учитывать при проектировании МСП с указанными наделками.

## Список использованной литературы

1. Правила классификации и постройки морских судов : НД № 2-020101-138. Часть II : Корпус. Санкт-Петербург: Рос. морской регистр судоходства, 2021. 319 с.
2. Правила классификации, постройки и оборудования плавучих буровых установок и морских стационарных платформ : НД 2-020201-015. Санкт-Петербург: Рос. морской регистр судоходства, 2018. Часть II. Корпус. С. 25–104.
3. Сазонов К.Е. Ледовый бассейн ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова: история создания // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. – 2015. – № 88(372). – С. 307–318.
4. Клементьева Н.Ю., Рыжков А.В., Сазонов К.Е. Модельные исследования ледового сопротивления перспективного ледокола на предельном мелководье // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2010. № 51(335). С. 5–12.
5. Добродеев А.А., Клубничкин А.М., Сазонов К.Е. Самоходные испытания моделей в ледовых бассейнах для определения ледового сопротивления // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2015. № 90(374). С. 109–116.
6. Добродеев А.А., Сазонов К.Е., Саперштейн И.А. Движение судов задним ходом во льдах: некоторые результаты исследований // Арктика: экология и экономика. 2019. № 4(36). С. 99–106.
7. Сазонов К.Е. Обоснование методов коррекции результатов модельных экспериментов по определению ледового сопротивления судна // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2016. № 92(376). С. 93–108.
8. Добродеев А.А., Сазонов К.Е. Модельный эксперимент по определению ледовой нагрузки на морские инженерные сооружения // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2019. № 2(388). С. 24–40. DOI: 10.24937/2542-2324-2019-2-388-24-40.
9. Сазонов К.Е., Чернов А.В. Экспериментальные методы определения глобальной ледовой нагрузки на морские инженерные сооружения // Арктика: экология и экономика. 2016. № 2(22). С. 90–97.
10. Добродеев А.А., Сазонов К.Е. Физическое моделирование ледовой нагрузки на протяженные гидротехнические сооружения. Сооружения с вертикальной стенкой // Арктика: экология и экономика. 2020. № 4(40). С. 77–89. DOI: 10.25283/2223-4594-2020-4-77-89.
11. Добродеев А.А., Сазонов К.Е. Физическое моделирование ледовой нагрузки на протяженные гидротехнические сооружения. Откосные сооружения с наклонной гранью // Арктика: экология и экономика. 2021. Т. 11, № 1. С. 90–100. DOI: 10.25283/2223-4594-2021-1-90-100.
12. Влияние масштабного эффекта на гидродинамические характеристики гребных винтов ледоколов и ледовых транспортных судов / Каневский Г.И., Клубничкин А.М., Попов А.Л., Сазонов К.Е. // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2020. № 2(392). С. 24–35. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-2-392-24-35.
13. Сазонов К.Е., Каневский Г.И., Лобачев М.П. Влияние сопротивления воды на прогноз ледового сопротивления судна по данным буксировочных испытаний в ледовом бассейне // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2021. № 4(398). С. 43–52. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-4-398-43-52.
14. Nortal-Hoikkanen A. FGX model ice at the Masa-Yards Arctic Research Centre // Proceedings of IAHR Ice Symposium. Espoo, Finland. 1990. P. 247–259.
15. Крыжевич Г.Б. Эффективность мер по снижению нагрузок на шельфовые сооружения ото льда умеренной толщины // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 3, т. 2. С. 45–51.
16. Крыжевич Г.Б. Экспериментальное обоснование способов снижения ледовых воздействий на шельфовые сооружения и методов расчета нагрузок // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 3, т. 2. С. 52–59.
17. Лобанов В.А. Моделирование ударных ледовых нагрузок методом конечных элементов // Вестник Волжской гос. акад. водного транспорта. 2006. № 18. С. 11–23.
18. Лобанов В.А. Моделирование льда в задачах с конечно-элементной постановкой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2008. № 4. С. 19–29.

19. Лобанов В.А. Алгоритм контактного взаимодействия тел со льдом в задачах с конечноэлементной постановкой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. № 3. С. 19–25.
20. Лобанов В.А. Гидродинамика льда в задачах с конечноэлементной постановкой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010. № 1. С. 10–17.
21. Лобанов В.А. Оценка местной ледовой прочности корпуса судна численными методами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2010. № 3. С. 1–9.
22. Лобанов В.А. Оценка ледовой ходкости судна численными методами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2011. № 1. С. 34–47.
23. Лобанов В.А. Численная оценка ледовых качеств судна. Управляемость // Вестник научно-технического развития. 2012. № 8(60). С. 18–63.
24. Лобанов В.А. Численные оценки ледовых качеств гребных винтов // Науковедение : электрон. журнал. 2012. № 4(13). С. 80 (15 с.).
25. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999. № 46. P. 131–150.
26. Moes N., Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth // Engineering Fracture Mechanics. 2002. Vol. 69, № 7. P. 813–833.
27. Коришунов В.А., Пономарев Д.А., Родионов А.А. Численное моделирование взаимодействия морских сооружений с ледовым полем // Морской вестник. 2017. Спец. вып. 1(13). С. 41–48.
28. Моделирование процессов разрушения льда с использованием методологии сцепляющих элементов / Коришунов В.А., Мудрик Р.С., Пономарев Д.А., Родионов А.А. // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 4, т. 1. С. 34–44.
29. Численное моделирование сопротивления судна с использованием методологии сцепляющих элементов / Коришунов В.А., Мудрик Р.С., Пономарев Д.А., Родионов А.А. // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 4, т. 2. С. 225–231.
30. Использование методологии сцепляющих элементов в моделировании процессов взаимодействия конструкций со льдом / Коришунов В.А., Мудрик Р.С., Пономарев Д.А., Родионов А.А. // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2020. Спец. вып. 1. С. 91–100. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-1-S-I-91-100.
31. Карулин Е.Б., Карулина М.М. Применение метода дискретных элементов для численного моделирования воздействия битого льда на заякоренные объекты // Вести газовой науки. 2017. № 4(32). С. 104–113.
32. Ji S., Di S., Long X. DEM simulation of uniaxial compressive and flexural strength of sea ice: parametric study // Journal of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 143, № 1. P. C4016010 (11 p.). DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000996.
33. Numerical simulation of an ice beam in four-point bending using SPH / Das J., Polić D., Ehlers S., Amdahl J. // Proceedings of the ASME 33<sup>rd</sup> International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. New York, 2014. Vol. 10 : Polar and arctic science and technology. P. OMAE2014-23228 (5 p.).
34. Zhang N., Zheng X., Ma Q. Updated smoothed particle hydrodynamics for simulating bending and compression failure progress of ice // Water. 2017. Vol. 9, № 11. P. 882 (24 p.). DOI: 10.3390/w9110882.
35. Liu Y., Qiao Y., Li T. A correct smoothed particle method to model structure-ice interaction // Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2019. Vol. 120, № 1. P. 177–201.
36. A numerical study on ice failure process and ice-ship interactions by smoothed particle hydrodynamics / Zhang N., Zheng X., Ma Q., Hu Z. // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2019. Vol. 11, № 2. P. 796–808.
37. Yreux E. MLS-based SPH in LS-DYNA for increased accuracy and tensile stability // 15<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2018. P. 1–10.
38. Wu C. T., Guo Y., Hu W. An introduction to the LS-DYNA smoothed particle Galerkin method for severe deformation and failure analysis in solids // 13<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2014. P. 8–10.
39. Wu Y., Wu C.T., Hu W. Parametric and convergence studies of the smoothed particle Galerkin (SPG) method in semi-brittle and ductile material failure analyses // 15<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2018. P. 1–12.
40. Recent developments of smoothed particle Galerkin (SPG) method for joint modeling / Wu Y., Hu W., Pan X., Wu C.T. // 16th International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2020. P. 1–11.
41. Филатов А.Р. Численное моделирование ледовых нагрузок бессеточными методами SPH и SPG // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2022. Спец. вып. 1. С. 7–10. DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-S-I-7-10.
42. Гриневич Д.В., Бузник В.М., Нуржый Г.А. Обзор применения численных методов для моделирования деформации и разрушения льда // Труды ВИАМ. 2020. № 8(90). С. 109–122. DOI: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-109-122.

43. Совершенствование методов расчета нагрузок от воздействия льда на гидротехнические сооружения / *Политько В.А., Соломатин С.В., Каракозова А.И., Трусков П.А.* // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15, № 5. С. 701–711.
44. A review for numerical simulation methods of ship-ice interaction / *Xue Y., Liu R., Li Z., Han D.* // Ocean Engineering. 2020. Vol. 215. P. 107853. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107853.
45. *Lucy L.B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // The Astronomical Journal. 1977. Vol. 82, № 12. P. 1013–1024.
46. *Gingold R.A., Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181, № 3. P. 375–389.
47. *Monaghan J.J., Lattanzio J.C.* A refined particle method for astrophysical problems // Astronomy and Astrophysics. 1985. Vol. 149, № 1. P. 135–143.
48. *Liu M.B., Liu G.R.* Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments // Archives of Computational Methods in Engineering. 2010. Vol. 17, № 1. P. 25–76.
49. Исследование прочностных свойств морского льда в обеспечение создания программных комплексов для расчета ледовой нагрузки / *Тимофеев О.Я., Сазонов К.Е., Добродеев А.А.* [и др.] // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2018. № 386(4). С. 41–49.
50. LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. I. California: LSTC, 2018. Pag. var.
51. *Dobrodeev A.A., Sazonov K.E., Sapershtein I.A.* Ships running astern in ice: some results of investigations // Arctic: ecology and economics. 2019. Vol. 4(36). P. 99–106 (in Russian).
52. *Sazonov K.E.* Justification of correction methods for model test results on ship ice resistance // Transactions of the Krylov Shipbuilding Research Institute. 2016. Vol. 92(376). P. 93–108 (in Russian).
53. *Dobrodeev A.A., Sazonov K.E.* Model experiment to determine the ice load on marine engineering structures // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2019. Vol. 2(388). P. 24–40. DOI: 10.24937/2542-2324-2019-2-388-24-40 (in Russian).
54. *Sazonov K.E., Chernov A.V.* Experimental methods to determine the global ice load on marine engineering structures // Arctic: ecology and economics. 2016. Vol. 2(22). P. 90–97 (in Russian).
55. *Dobrodeev A.A., Sazonov K.E.* Physical modeling of ice loads on extended hydraulic structures. Wall sided structures // Arctic: ecology and economics. 2020. Vol. 4(40). P. 77–89. DOI: 10.25283/2223-4594-2020-4-77-89 (in Russian).
56. *Dobrodeev A.A., Sazonov K.E.* Physical modeling of ice loads on extended hydraulic structures. Sloping structures // Arctic: ecology and economics. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 90–100. DOI: 10.25283/2223-4594-2021-1-90-100 (in Russian).
57. Scale effect on hydrodynamic characteristics of propellers of icebreakers and cargo ships / *G.I. Kanevsky, A.M. Klubnichkin, A.L. Popov, K.E. Sazonov* // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2020. Vol. 2(392). P. 24–35. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-2-392-24-35 (in Russian).
58. *Sazonov K.E., Kanevsky G.I., Lobachev M.P.* Influence of water resistance on ship ice resistance predictions based on towing tests in ice basin // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2021. Vol. 4(398). P. 43–52. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-4-398-43-52 (in Russian).
59. *Nortala-Hoikkanen A.* FGX model ice at the Masa-Yards Arctic Research Centre // IAHR Ice Symposium. Espoo, 1990. P. 247–259.
60. *Kryzhevich G.B.* Efficiency of measures to reduce loads on offshore structures from ice of moderate thickness // Smart marine technologies. 2019. No. 3, vol. 2. P. 45–51 (in Russian).
61. *Kryzhevich G.B.* Experimental validation of reducing ice effects on offshore structures and load calculation methods // Smart marine technologies. 2019. No. 3, vol. 2. P. 52–59 (in Russian).

## References

1. Rules for classification and construction of sea-going ships. ND No. 2-020101-138. Part II: Hull. St. Petersburg : Russian Maritime Register of Shipping. 2021. 319 p (in Russian).
2. Rules for the Classification and Construction of Floating Offshore Oil-And-Gas Production Units, ND 2-020201-015. St. Petersburg : Russian Maritime Register of Shipping, 2018. Part II. Hull. P. 25–104 (in Russian).
3. *Sazonov K.E.* Ice basin of Krylov Shipbuilding Research Institute: background // Transactions of the Krylov Shipbuilding Research Institute. 2015. Vol. 88(372). P. 307–318 (in Russian).
4. *Klementieva N.Yu., Ryzhkov A.V., Sazonov K.E.* Model studies on ice resistance of an advanced icebreaker in limiting water depth // Transactions of the Krylov Shipbuilding Research Institute. 2010. Vol. 51(335). P. 5–12 (in Russian).
5. *Dobrodeev A.A., Klubnichkin A.M., Sazonov K.E.* Self-propelled model tests to determine ice resistance // Transactions of the Krylov Shipbuilding



17. Lobanov V.A. Modeling of ice impact loads by finite element method // Herald of Volga State Academy of Water Transport. 2006. No. 18. P. 11–23 (in Russian).
18. Lobanov V.A. Modeling of ice in FEM tasks // Differential equations and management processes. 2008. No. 4. P. 19–29 (in Russian).
19. Lobanov V.A. Algorithm of contact interaction of bodies with ice in FEM tasks // Differential equations and management processes. 2009. No. 3. P. 19–25 (in Russian).
20. Lobanov V.A. Ice hydrodynamics in FEM tasks // Differential equations and management processes. 2010. No. 1. P. 10–17 (in Russian).
21. Lobanov V.A. Estimation of local ice strength of the hull using numerical techniques // Differential equations and management processes. 2010. No. 3. P. 1–9 (in Russian).
22. Lobanov V.A. Estimation of ship performance in ice by numerical techniques // Differential equations and management processes. 2011. No. 1. P. 34–47 (in Russian).
23. Lobanov V.A. Numerical estimation of ship ice qualities. Maneuverability // Herald of science and technology development. 2012. No. 8(60). P. 18–63 (in Russian).
24. Lobanov V.A. Numerical estimation of propeller ice qualities // Naukovedenie: electronic journal. 2012. No. 4(13). P. 80 (15 p.) (in Russian).
25. Moes N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999. No. 46. P. 131–150.
26. Moes N., Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth // Engineering Fracture Mechanics. 2002. Vol. 69, No. 7. P. 813–833.
27. Korshunov V.A., Ponomarev D.A., Rodionov A.A. Numerical modeling of marine structure interaction with ice field // Morskoi vestnik. 2017. Special Edition 1(13). P. 41–48 (in Russian).
28. Modeling of ice failure using the methodology of cohesive elements / V.A. Korshunov, R.S. Mudrik, D.A. Ponomarev, A.A. Rodionov // Smart marine technologies. 2019. No. 4, vol. 1. P. 34–44 (in Russian).
29. Numerical modeling of ship resistance using the methodology of cohesive elements / V.A. Korshunov, R.S. Mudrik, D.A. Ponomarev, A.A. Rodionov // Smart marine technologies. 2019. No. 4, vol. 2. P. 225–231 (in Russian).
30. Application of cohesive element methodology in modeling interaction processes of structures with ice / V.A. Korshunov, R.S. Mudrik, D.A. Ponomarev, A.A. Rodionov // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2020. Special Edition 1. P. 91–100. DOI: 10.24937/2542-2324-2020-1-S-I-91-100 (in Russian).
31. Karulin E.B., Karulina M.M. Application of the discrete element method for numerical modeling of broken ice effect on moored objects // News of gas science. 2017. No. 4(32). P. 104–113 (in Russian).
32. Ji S., Di S., Long X. DEM simulation of uniaxial compressive and flexural strength of sea ice: parametric study // Journal of Engineering Mechanics. 2017. Vol. 143, no. 1. P. C4016010 (11 p.). DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000996.
33. Numerical simulation of an ice beam in four-point bending using SPH / J. Das, D. Polić, S. Ehlers, J. Amdahl // Proceedings of the ASME 33<sup>rd</sup> International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. New York, 2014. Vol. 10 : Polar and arctic science and technology. P. OMAE2014-23228 (5 p.).
34. Zhang N., Zheng X., Ma Q. Updated smoothed particle hydrodynamics for simulating bending and compression failure progress of ice // Water. 2017. Vol. 9, no. 11. P. 882 (24 p.). DOI: 10.3390/w9110882.
35. Liu Y., Qiao Y., Li T. A correct smoothed particle method to model structure-ice interaction // Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2019. Vol. 120, no. 1. P. 177–201.
36. A numerical study on ice failure process and ice-ship interactions by smoothed particle hydrodynamics / N. Zhang, X. Zheng, Q. Ma, Z. Hu // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2019. Vol. 11, no. 2. P. 796–808.
37. Yreux E. MLS-based SPH in LS-DYNA for increased accuracy and tensile stability // 15<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2018. P. 1–10.
38. Wu C.T., Guo Y., Hu W. An introduction to the LS-DYNA smoothed particle Galerkin method for severe deformation and failure analysis in solids // 13<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2014. P. 8–10.
39. Wu Y., Wu C.T., Hu W. Parametric and convergence studies of the smoothed particle Galerkin (SPG) method in semi-brittle and ductile material failure analyses // 15<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2018. P. 1–12.
40. Recent developments of smoothed particle Galerkin (SPG) method for joint modeling / Y. Wu, W. Hu, X. Pan, C.T. Wu // 16<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference. [Stuttgart], 2020. P. 1–11.
41. Filatov A.R. Numerical modeling of ice loads with meshless SPH and SPG methods // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022. Special Issue 1. P. 7–10. DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-S-I-7-10 (in Russian).
42. Grinevich D.A., Buzhnik V.M., Nuzhnyi G.A. Overview of numerical methods applied for modeling deformation and damage of ice // Transactions of VIAM. 2020. Vol. 8(90). P. 109–122. DOI: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-109-122 (in Russian).

43. Refinement of methods for calculation of ice loads on hydraulic structures / V.A. Politko, S.V. Solomatin, A.I. Karakozova, P.A. Truskov // Vestnik MGSU. 2020. Vol. 15, no. 5. P. 701–711 (in Russian).
44. A review for numerical simulation methods of ship-ice interaction / Y. Xue, R. Liu, Z. Li, D. Han // Ocean Engineering. 2020. Vol. 215. P. 107853. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107853.
45. Lucy L.B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // The Astronomical Journal. 1977. Vol. 82, no. 12. P. 1013–1024.
46. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181, no. 3. P. 375–389.
47. Monaghan J.J., Lattanzio J.C. A refined particle method for astrophysical problems // Astronomy and Astrophysics. 1985. Vol. 149, no. 1. P. 135–143.
48. Liu M.B., Liu G.R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments // Archives of Computational Methods in Engineering. 2010. Vol. 17, no. 1. P. 25–76.
49. Investigation of sea ice properties to support development of software packages for ice load calculations / O.Ya. Timofeev, K.E. Sazonov, A.A. Dobrodeev [et al.] // Transactions of the Krylov State Research Centre. 2018. Vol. 386(4). P. 41–49 (in Russian).
50. LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. I. California: LSTC, 2018. Pag. var.

---

### Сведения об авторе

Филатов Антон Романович, к.т.н., научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр», ассистент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-48-21. E-mail: filatov\_ar@voenmeh.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7352-3003>.

### About the author

Anton R. Filatov, Cand. Sci. (Eng.), Research Scientist, Krylov State Research Centre, Assistant lecturer, Higher Mathematics Department, Baltic State Technical University “Voennmekh”. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-48-21. E-mail: filatov\_ar@voenmeh.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7352-3003>.

Поступила / Received: 25.01.22  
Принята в печать / Accepted: 28.04.22  
© Филатов А.Р., 2022