

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-127-132

УДК 621.317.334.3

Г.Н. Цицикян , С.Н. Кунаев 

ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

## СТРОГИЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ СООСНЫХ ВИТКОВ И ПЛОСКИХ (ДИСКОВЫХ) КАТУШЕК С ТОКОМ

**Объект и цель научной работы.** Статья посвящена определению коэффициентов взаимной индукции соосных контуров в системе плоских катушек. Записаны известные модификации для взаимной индуктивности и электродинамических сил в системе соосных контуров, а также сопоставлены расчетные выражения для их вычисления.

**Материалы и методы.** Используются методы математической физики и теоретической электротехники.

**Основные результаты.** Даны альтернативные выражения для коэффициентов взаимной индукции соосных катушек и электродинамических сил между ними при протекании токов. Построены кривые взаимной индуктивности для планарных катушек с расстоянием между плоскостями, равным 2 см, с расстоянием между витками в катушке  $P$ , равным 1 см, и с расстоянием между витками в катушке  $N$ , равным 0,5 см, 0,4 см и 0,3 см.

**Заключение.** Получены расчетные выражения для коэффициентов взаимной индукции и электродинамических сил при протекании токов в планарных соосных катушках, имеющие весьма важное значение для проблемы беспроводной передачи энергии.

**Ключевые слова:** соосные катушки, коэффициент взаимной индукции, электродинамические силы.

*Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-127-132

UDC 621.317.334.3

G.N. Tsitsikyan , S.N. Kunaev 

Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

## EXACT AND APPROXIMATE EXPRESSIONS FOR MUTUAL INDUCTANCE COEFFICIENTS AND ELECTRODYNAMIC FORCES OF CO-AXIAL TURNS AND PLANAR (DISK) COILS WITH CURRENT

**Object and purpose of research.** The paper is concerned with the mutual inductance coefficients of co-axial circuits in a planar coil system. Known modifications for mutual inductance and electrodynamic forces in a system of co-axial circuits are written, and relations for their calculation are compared.

**Materials and methods.** For this purpose the methods of mathematical physics and theoretic electric engineering are used.

**Main results.** Alternative expressions are given for mutual inductance coefficients of co-axial coils and electrodynamic forces between the live coils. Curves of mutual inductance are plotted for planar coils with the distance between planes equal to 2 cm and the distance between coil turns  $P$  equal to 1 cm and the distance between coil turns  $N$  equal to 0.5 cm, 0.4 cm & 0.3 cm.

**Conclusion.** Relations have been derived for calculation of mutual inductance coefficients and electrodynamic forces at current passage in planar co-axial coils, which are very important for wireless transfer of power.

**Keywords:** co-axial coils, mutual inductance coefficients, electrodynamic forces.

*The authors declare no conflicts of interest.*

*Для цитирования:* Цицикян Г.Н., Кунаев С.Н. Строгие и приближенные выражения для коэффициентов взаимной индукции и электродинамических сил соосных витков и плоских (дисковых) катушек с током. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 2(400): 127–132.

*For citations:* Tsitsikyan G.N., Kunaev S.N. Exact and approximate expressions for mutual inductance coefficients and electrodynamic forces of co-axial turns and planar (disk) coils with current. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 2(400): 127–132 (in Russian).

В статье сопоставлены выражения для коэффициентов взаимной индукции соосных контуров и возникающих электродинамических сил взаимодействия при протекании токов, с помощью которых закладываются основы расчета более сложных конфигураций систем катушек, характеризующихся симметрией вращения. Пример такой конфигурации дан в конце статьи. В качестве отправных положений и соответствующих сопоставлений приняты литературные источники [1–5].

Изложение начнем со строгой формулы для коэффициента взаимной индукции двух соосных витков (рис. 1) с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ :

$$M = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right], \quad (1)$$

где  $K$  и  $E$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода и

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (a + z)^2}. \quad (2)$$

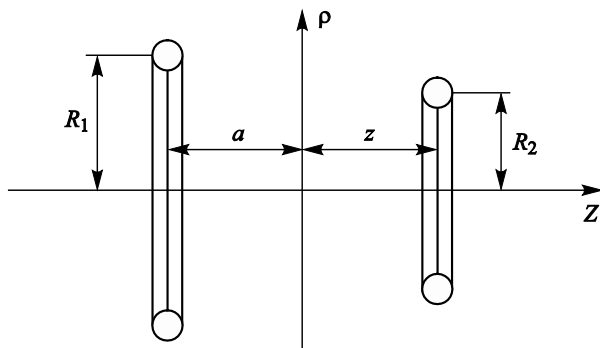
Ее видоизменение в [4] записано следующим образом:

$$M = \frac{2\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{k} \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right]. \quad (3)$$

В [2] записаны и другие строгие выражения для  $M$ , одно из которых представлено в виде:

$$M = \frac{2\mu_0 \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{k_1}} (K_1 - E_1), \quad (4)$$

где  $K_1$  и  $E_1$  полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k_1 = (1 - k')/(1 + k')$  и  $(k')^2 = 1 - k^2$ .



**Рис. 1.** Два соосных витка с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и с расстоянием  $a + z$  между плоскостями

**Fig. 1.** Two co-axial turns with radii  $R_1$  and  $R_2$  and the distance between planes  $a + z$

Если заменить обозначения  $R_1$  на  $a$ ,  $R_2$  на  $\rho$ ,  $(a + z)$  на  $z$  и записать  $k^2$  следующим образом:

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2},$$

то уравнение (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} M &= \mu_0 \sqrt{a\rho} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right] = \\ &= \mu_0 \frac{\sqrt{a\rho}}{k} \left[ (2 - k^2) K - 2E \right] = \\ &= \frac{\mu_0 \sqrt{a\rho}}{k} \left[ 2(K - E) - k^2 K \right]. \end{aligned}$$

Тогда с подстановкой  $k = 2 \frac{\sqrt{a\rho}}{\sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}}$

получим:

$$M = \frac{\mu_0}{2} \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2} \left[ 2(K - E) - k^2 K \right],$$

а вводя обозначение  $r_1^2 = (a + \rho)^2 + z^2$ , где  $r_1$  подставляется в метрах, а также величину  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м, будем иметь:

$$M \text{ (Гн)} = 2\pi \cdot 10^{-7} r_1 \left[ 2(K - E) - k^2 K \right].$$

Именно в таком виде дано выражение для коэффициента  $M$  двух соосных витков в работе М. Гарретта (M.W. Garrett. Calculation of Fields, Forces, and Mutual Inductances of current Systems by Elliptic Integrals // Journal of Applied Physics. 1963. Vol. 34, № 9. September. P. 2567–2573) со ссылкой на первоисточник (J.C. Maxwell. Electricity and Magnetism. Oxford, England, 1873).

Еще одно выражение записано в [3, 6] в виде

$$M = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} Q_{1/2}(g), \quad (5)$$

$$\text{где } g = 1 + \frac{(a + z)^2 + (R_2 - R_1)^2}{2R_1 R_2}. \quad (6)$$

и  $Q_{1/2}(g)$  является сферической функцией Лежандра второго рода [3] с полуцелым индексом, табличные значения которые имеются в [6].

Подчеркнем, что для случая двух контуров (рис. 1) коэффициент взаимной индукции можно с хорошей точностью рассчитать по формуле (П.3)

из [3], представленной в соответствии с обозначениями рис. 1 в виде:

$$M = \frac{\pi \mu_0 R_1^2}{2R_2} \left[ \begin{array}{l} (q^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{1 - 4q^2}{(q^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} + \\ + \frac{15}{64} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 \frac{8q^4 - 12q^2 + 1}{(q^2 + 1)^{\frac{11}{2}}} - \\ - \frac{35}{1024} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^6 \frac{64q^6 - 240q^4 + 120q^2 - 5}{(q^2 + 1)^{\frac{15}{2}}} \dots \end{array} \right], \quad (7)$$

где  $q = (a + z)/R_2$ .

Заметим, что из выражения (7) можно получить выражение (5-22) из [2], когда  $\delta = R_1/R_2$  достаточно мало и оба контура лежат в одной плоскости (рис. 2), а именно:

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 \delta R_1 \left[ \begin{array}{l} 1 + \frac{3}{8} \delta^2 + \frac{15}{64} \delta^4 + \frac{175}{1024} \delta^6 + \dots + \\ + \frac{(2n!)^2 (2n+1)}{2^{4n} (n!)^4 (n+1)} \delta^{2n} + \dots \end{array} \right], \quad (8)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Из работы [7] для случая двух соосных контуров, расположенных в параллельных плоскостях с расстоянием  $h$  между ними, можно заимствовать выражение для взаимной индуктивности, но с исправлением допущенной опечатки (вместо  $(-2\cos\theta)$  должно стоять  $(2\cos 2\varphi)$  в знаменателе под знаком корня) в следующем виде:

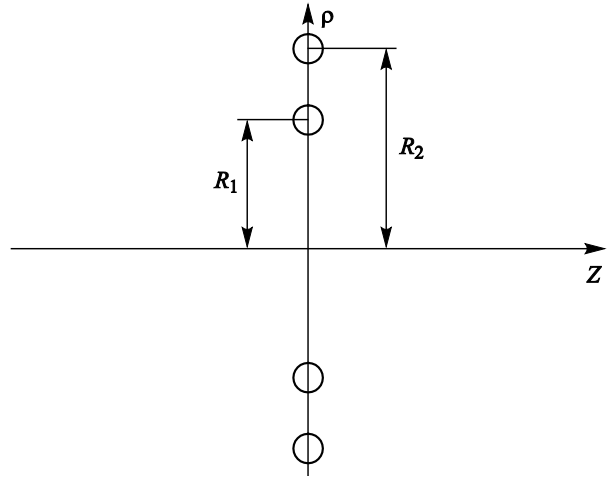
$$M = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 2\varphi d\varphi}{\sqrt{h^2 + R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos 2\varphi}}. \quad (9)$$

При введении переменной  $\varphi_1 = 2\varphi$  выражение (9) преобразуется к виду:

$$M = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi_1 d\varphi_1}{\sqrt{h^2 + R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos \varphi_1}}. \quad (10)$$

Если теперь  $\varphi_1$  заменить на  $\pi - \varphi'$ , то будем иметь:

$$M = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{(h^2 + R_1^2 + R_2^2) \left[ 1 - \frac{2R_1 R_2}{h^2 + R_1^2 + R_2^2} \cos \varphi' \right]}} = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2(h^2 + R_1^2 + R_2^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{[1 - \gamma \cos \varphi']^{\frac{1}{2}}}, \quad (11)$$



**Рис. 2.** Два контура с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , лежащие в одной плоскости

**Fig. 2.** Two circuits with radii  $R_1$  and  $R_2$  within one plane

$$\text{где } \gamma = \frac{2R_1 R_2}{h^2 + R_1^2 + R_2^2}. \quad (12)$$

Учитывая, что для  $(1-x)^{-1/2}$  при  $x^2 < 1$  можно воспользоваться рядом (9.03) из [8]:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots,$$

и полагая, что  $x = \gamma \cos \varphi'$ , получим:

$$M = \frac{\mu_0 R_1 R_2}{2(h^2 + R_1^2 + R_2^2)^{1/2}} \frac{\pi}{2} \gamma \left( 1 + \gamma^2 \frac{15}{32} + \gamma^4 \frac{315}{1024} + \dots \right), \quad (13)$$

т.е. выражение для  $M$ , записанное в [5] с учетом обозначения для  $\gamma$  (12).

Перейдем к конкретным примерам. Пусть  $R_1 = R_2 = R$ ,  $h = R$ . Тогда  $\gamma = 2/3$ , и для  $M$  по формуле (13) имеем:

$$M \cong \mu_0 \frac{R^2}{2(3R^2)^{1/2}} \frac{\pi}{3} \left( 1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{15}{32} + \frac{16}{81} \cdot \frac{315}{1024} \right) = \mu_0 R \frac{1,269\pi}{2 \cdot 3^{3/2}} = \mu_0 R \cdot 0,3836.$$

Соответственно, по формуле (7) ( $q = 1$ ) получаем:

$$M \cong \mu_0 R \frac{\pi}{2} \left[ 2^{-3/2} + \frac{3}{8} \frac{(-3)}{2^{7/2}} + \frac{15}{64} \frac{(-3)}{2^{11/2}} \right] \cong \mu_0 R \frac{\pi}{2} [0,3535 - 0,0994 - 0,0155] = \mu_0 R \cdot 0,3747,$$

и результаты расчетов вполне сопоставимы. С уменьшением значения  $\gamma$  наблюдается еще лучшее схождение.

Переходя к определению электродинамических сил между круговыми соосными контурами при протекании токов  $i_1$  и  $i_2$  (рис. 1), сперва запишем выражение для силы взаимодействия  $f$ , данное в [3] в виде формулы (П.6):

$$f = \frac{\pi\mu_0 i_1 i_2}{2} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \left[ \begin{aligned} & -\frac{3q}{(q^2+1)^2} - \frac{15}{8} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 q \frac{3-4q^2}{(q^2+1)^2} + \\ & + \frac{105}{64} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 q \frac{-8q^4+20q^2-5}{(q^2+1)^2} - \\ & - \frac{315}{1024} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^6 \times \\ & \times q \frac{-64q^6+336q^4-280q^2+35}{(q^2+1)^2} \dots \end{aligned} \right], \quad (14)$$

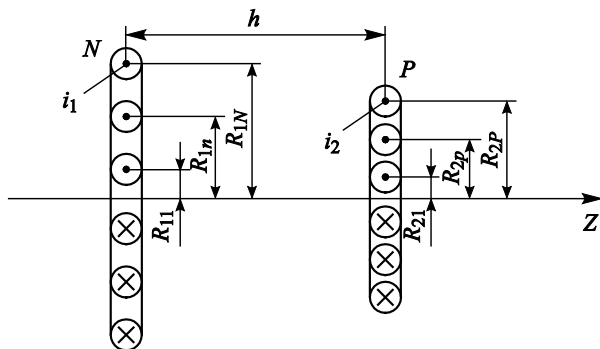
где, как и прежде,  $q = (a+z)/R_2$ .

Из (14) непосредственно вытекает, что при  $a+z=0$ , т.е. для витков, расположенных как на рис. 2, сила  $f=0$ . Вместе с тем при  $q=1$ ,  $R_1=R_2=R$  и  $i_1=i_2=i$  сила  $f$  может быть определена на основании (14), а именно:

$$f = \frac{\pi\mu_0 i^2}{2} \left( \begin{aligned} & \frac{-3}{2^{5/2}} - \frac{15}{8} \frac{3-4}{2^{9/2}} + \frac{105}{64} \frac{-8+20-5}{2^{13/2}} - \\ & \frac{315}{1024} \frac{-64+336-280+35}{2^{17/2}} \end{aligned} \right) =$$

$$= \frac{\pi\mu_0 i^2}{2} (-0,53033+0,08286+0,12689-0,02294) =$$

$$= -\pi\mu_0 i^2 0,17176.$$



**Рис. 3.** Две соосные дисковые катушки с числом витков  $N$  и  $P$  с расстоянием  $h$  между плоскостями их расположения с токами  $i_1$  и  $i_2$  соответственно  
**Fig. 3.** Two co-axial disk coils with the number of turns  $N$  and  $P$  and the distance  $h$  between planes of their location with currents  $i_1$  and  $i_2$ , respectively

Заметим также, что при  $q=0$  ( $a+z=0$ ) выражение (14) обращается в нуль. Знак минус означает, что на контуры с током действует сила притяжения. Теперь запишем строгое выражение для силы взаимодействия двух витков с токами  $i_1$  и  $i_2$ , которое представлено ниже следующим образом [9]:

$$f = \mu_0 i_1 i_2 \frac{h}{\left[ h^2 + (R_1 + R_2)^2 \right]^{1/2}} \left[ K(k) - \frac{2-k^2}{2(1-k^2)} E(k) \right] =$$

$$= \mu_0 i_1 i_2 \frac{h}{\left[ h^2 + (R_1 + R_2)^2 \right]^{1/2}} \times$$

$$\times \left[ K(k) - E(k) - \frac{2R_1 R_2}{h^2 + (R_1 - R_2)^2} E(k) \right], \quad (15)$$

$$\text{где } k = \left[ \frac{4R_1 R_2}{h^2 + (R_1 + R_2)^2} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

и вторая запись для силы  $f$  также может быть сведена к форме представления, имеющейся в уже упомянутой работе М. Гарретта.

Здесь  $h$  – расстояние между плоскостями расположения соосных контуров,  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы контуров с токами  $i_1$  и  $i_2$ .

Преобразованная форма представления (15) с точностью до знака может быть записана в виде [4]:

$$f = \frac{\mu_0 i_1 i_2 h k}{4(R_1 R_2)^{1/2}} \left[ \frac{2-k^2}{1-k^2} E(k) - 2K(k) \right]. \quad (17)$$

Наконец, еще одна компактная формула для силы взаимодействия двух витков с токами  $i_1$  и  $i_2$  может быть записана в виде [3]:

$$f = \mu_0 i_1 i_2 \frac{h}{\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{Q_{1/2}^1(g)}{(g^2-1)^{1/2}}, \quad (18)$$

$$\text{где } g = 1 + \frac{(a+z)^2 + (R_1 - R_2)^2}{2R_1 R_2}, \quad (19)$$

и  $Q_{1/2}^1(g)$  – присоединенная функция Лежандра второго рода с полуцелым индексом.

Наибольший интерес в проблеме «wireless power application» [5, 10] связан с эффективностью передачи энергии с помощью планарных (плоских) катушек с воздушным промежутком порядка десятков мм (рис. 4). Развернутое выражение для взаимной индуктивности имеется в [5], но в приближении, по которому получена формула (13). Обращаясь к рис. 3, где показаны две со-

осные взаимодействующие катушки, можно получить следующие выражения для коэффициента взаимной индукции  $M$  и силы взаимодействия  $f$  при протекании токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$M = \frac{\pi\mu_0}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \frac{R_{1n}^2}{R_{2p}} \left\{ \left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8} \left( \frac{R_{1n}}{R_{2p}} \right)^2 \frac{1 - 4 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{15}{64} \left( \frac{R_{1n}}{R_{2p}} \right)^4 \frac{8 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^4 - 12 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{11}{2}}} - \frac{35}{1024} \left( \frac{R_{1n}}{R_{2p}} \right)^6 \frac{64 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^6 - 240 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^4 + 120 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 - 5}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{15}{2}}} \dots \right\} \quad (20)$$

и выражение для силы  $f$ :

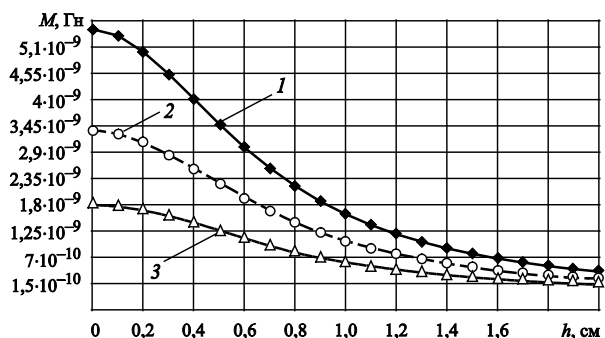
$$f = \frac{\pi\mu_0 i_1 i_2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P h \frac{R_{1n}^2}{(R_{2p})^3} \left\{ \frac{-3}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{5}{2}}} - \frac{15}{8} \left( \frac{R_{1n}}{R_{2p}} \right)^2 \frac{3 - 4 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{9}{2}}} + \frac{105}{64} \left( \frac{R_{1n}}{R_{2p}} \right)^4 \frac{-8 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^4 + 20 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 - 5}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{13}{2}}} - \frac{315}{1024} \left( \frac{R_{1n}}{R_{2p}} \right)^6 \frac{-64 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^6 + 336 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^4 - 280 \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 35}{\left[ \left( \frac{h}{R_{2p}} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{17}{2}}} \dots \right\}$$

Кривые для  $M$  построены на рис. 4.

## Вывод

### Conclusion

Даны альтернативные выражения для коэффициентов взаимной индукции соосных витков и электродинамических сил между ними при протекании токов с обобщением на случай соосных планарных (плоских) катушек. Представленные результаты



**Рис. 4.** Кривые взаимной индуктивности для планарных катушек с расстоянием между плоскостями, равным 2 см, с расстоянием между витками катушки  $P$ , равным 1 см, и с расстоянием между витками катушки  $N$ , равными: 1 – 0,5 см; 2 – 0,4 см; 3 – 0,3 см

**Fig. 4.** Curves of mutual inductance for planar coils with the distance between planes equal to 2 cm, the distance between coil turns  $P$  equal to 1 cm, and the distance between coil turns  $N$  equal to: 1 – 0.5 cm; 2 – 0.4 cm; 3 – 0.3 cm

могут быть использованы при разработке беспроводных систем передачи электроэнергии и для других практических приложений.

## Список использованной литературы

1. Grover F.W. Inductance Calculating: Working formulas and Tables. New York : Van Nostrand, 1946. XIV, 236 p.
2. Калантаров П.А., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей : справ. книга. 3-е изд., перераб. и доп. Ленинград : Энергоатомиздат, 1986. 487 с.
3. Цицикян Г.Н. Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1985. № 6. С. 90–99.
4. New Formulas for mutual Inductance and Axial Magnetic Force Between a Thin Wall Solenoid and Thick circular Coil of rectangular Cross-Section / S. Babic, F. Sirois, C. Akyel [et al.] // IEEE Transaction on Magnetics. 2011. Vol. 47, № 8. P. 2034–2044. DOI: 10.1109/TMAG.2011.2125796.
5. Modeling of mutual Coupling Between Planar Inductors in Wireless Power Application / S. Raju, R. Wu, M. Chan, C.P. Yue // IEEE Transactions on Power Electronics. 2014. Vol. 29, № 1. P. 481–490. DOI: 10.1109/TPEL.2013.2253334.
6. Цицикян Г.Н., Бобровников П.В., Антипов М.Ю. Руководство по расчету индуктивностей и электродинамических сил в токоведущих частях электротехнических комплексов. Санкт-Петербург : Крыловский гос. науч. центр, 2020. 118 с.

7. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Автономные электро-энергетические системы. Вопросы электробезопасности и электромагнитной совместимости. Санкт-Петербург : Крыловский гос. науч. центр, 2017. 106 с.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 9-е, стер. Санкт-Петербург : Лань, 2005. 228 с.
9. Цицикян Г.Н. О взаимной индуктивности и электродинамических силах взаимодействия коаксиальных контуров // Известия Рос. академии наук. Энергетика. 2018. № 4. С. 40–45. DOI: 10.31857/S000233100002362-2.
10. Lee S.-H., Lorenz R.D. Development and Validation of Model for 95%-Efficiency 220-W Wireless Power Transfer Over a 30-cm Air Gap // IEEE Transactions on Industry Applications. 2011. Vol. 47, № 6. P. 2495–2504. DOI: 10.1109/TIA.2011.2168555.
7. Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu. Self-contained electric power systems. Electric safety and electromagnetic compatibility issues. St. Petersburg : Krylov State Research Centre. 2017. 106 p. (in Russian).
8. Dvait G.B. Tables of integrals and other mathematical formulas. Izd. 9-e, ster. St. Petersburg : Lan, 2005. 228 p. (in Russian).
9. Tsitsikyan G.N. On Mutual inductance and electromagnetic forces in interaction between co-axial circuits // Izvestia Ros. Akademii nauk. Energetika. 2018. No. 4. P. 40–45. DOI: 10.31857/S000233100002362-2 (in Russian).
10. Lee S.-H., Lorenz R.D. Development and Validation of Model for 95%-Efficiency 220-W Wireless Power Transfer Over a 30-cm Air Gap // IEEE Transactions on Industry Applications. 2011. Vol. 47, no. 6. P. 2495–2504. DOI: 10.1109/TIA.2011.2168555.

## References

1. Grover F.W. Inductance Calculating: Working formulas and Tables. New York : Van Nostrand, 1946. XIV, 236 p.
2. Kalantarov P.A., Tseitlin L.A. Calculation of inductances: Reference book, 3<sup>rd</sup> edition, modified and supplemented. Leningrad : Energoatomizdat, 1986. 487 p. (in Russian).
3. Tsitsikyan G.N. Mutual inductance and interaction forces of co-axial circuits, solenoids and coils // Izvestia AN SSSR. Energy and Transport. No. 6. P. 90–99 (in Russian).
4. New Formulas for mutual Inductance and Axial Magnetic Force Between a Thin Wall Solenoid and Thick circular Coil of rectangular Cross-Section / S. Babic, F. Sirois, C. Akyel [et al.] // IEEE Transactions on Magnetics. 2011. Vol. 47, no. 8. P. 2034–2044. DOI: 10.1109/TMAG.2011.2125796.
5. Modeling of mutual Coupling Between Planar Inductors in Wireless Power Application / S. Raju, R. Wu, M. Chan, C.P. Yue // IEEE Transactions on Power Electronics. 2014. Vol. 29, no. 1. P. 481–490. DOI: 10.1109/TPEL.2013.2253334.
6. Tsitsikyan G.N., Bobrovnikov P.V., Antipov M.Yu. Manual on calculation of inductances and electrodynamic forces in live parts of electric engineering packages. St. Petersburg : Krylov State Research Centre, 2020. 118 p. (in Russian).

---

## Сведения об авторах

Цицикян Георгий Николаевич, д.т.н., профессор, начальник сектора – заместитель начальника отдела филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 6. Тел.: +7 (812) 748-52-39. E-mail: George.20021940@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8813-6003>.

Кунаев Семен Николаевич, инженер филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 6. Тел.: +7 (999) 669-00-51. E-mail: semen-kunaev@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-1756-0760>.

## About the authors

Georgy N. Tsitsikyan, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of Sector – Deputy Head of Department, TSNII SET branch of Krylov State Research Centre. Address: 6, Blagodatnaya st. St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: +7 (812) 748-52-39. E-mail: George.20021940@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8813-6003>.

Semyon N. Kunaev, Engineer, TSNII SET branch of Krylov State Research Centre. Address: 6, Blagodatnaya st. St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: +7 (999) 669-00-51. E-mail: semen-kunaev@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-1756-0760>.

Поступила / Received: 26.01.22  
Принята в печать / Accepted: 04.05.22  
© Цицикян Г.Н., Кунаев С.Н., 2022