

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-399-75-88
УДК [678.067+620.22-419.8]:539.3

А.П. Лысенко, Л.В. Паршина , Б.А. Ярцев 
ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИММЕТРИЧНОГО СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НАГРУЖЕНИЯ

Объект и цель научной работы. Объектом исследования являются уравновешенные и квазиизотропные в плоскости армирования симметричные слоистые композитные структуры, компонуемые из слоев армированного тканью стеклопластика. Цель работы – демонстрация необходимости обоснования возможности использования экспериментальных величин эффективных механических характеристик, определенных в условиях одноосного растяжения/сжатия, для расчета тонкостенных слоистых композитных конструкций, эксплуатирующихся в условиях изгиба/кручения.

Материалы и методы. Моделирование деформирования слоистых композитных структур выполняется на основе уточненной теории пластин первого порядка, модели комплексных модулей и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости. Для прогнозирования предельного состояния используется тензорно-полиномиальный критерий прочности Цая – Ву.

Основные результаты. Предложены соотношения, позволяющие прогнозировать значения эффективных упругих постоянных, диссипативных характеристик и пределов прочности рассматриваемых симметричных слоистых структур. Показано, что уравновешенная симметричная структура, образованная четырьмя слоями композита, с достаточной для инженерных расчетов точностью может рассматриваться как ортотропный материал при всех условиях нагружения. В то же время симметричная квазиизотропная в плоскости армирования структура, образованная тридцатью двумя слоями композита, при растяжении/сжатии должна классифицироваться как ортотропная, а при изгибе/кручении ее необходимо признать моноклинной.

Закключение. Полученные результаты свидетельствуют о необходимости обоснования использования экспериментальных величин эффективных механических характеристик, определенных в условиях одноосного растяжения/сжатия, для расчета тонкостенных слоистых композитных конструкций, эксплуатирующихся в условиях изгиба/кручения.

Ключевые слова: слоистая структура, композит, анизотропия, эффективные характеристики, упругие постоянные, диссипативные характеристики, пределы прочности.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-399-75-88
UDC [678.067+620.22-419.8]:539.3

A. Lysenko, L. Parshina , B. Yartsev 
Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

EFFECTIVE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF SYMMETRIC LAYERED COMPOSITE IN DIFFERENT LOADING CONDITIONS

Object and purpose of research. This paper discusses balanced and quasi-isotropic (in the reinforcement plane) symmetric layered composite structures made up by the layers of cloth-reinforced GRP. The purpose of this work was

Для цитирования: Лысенко А.П., Паршина Л.В., Ярцев Б.А. Эффективные механические характеристики симметричного слоистого композита при различных условиях нагружения. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 1(399): 75–88.

For citations: Lysenko A., Parshina L., Yartsev B. Effective mechanical characteristics of symmetric layered composite in different loading conditions. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 1(399): 75–88 (in Russian).

to demonstrate the necessity to justify the applicability of experimental results for effective mechanical parameters determined in the conditions of uniaxial tension/compression to the calculation of thin-walled layered composite structures that work in bending/twisting conditions.

Materials and methods. The straining of layered composite structures is simulated as per the updated theory of first-order plates, the model of complex moduli and the principle of elastic-viscoelastic correspondence in linear viscoelasticity theory. Limit state predictions are based on Tsai-Wu tensor-polynomial strength criterion.

Main results. This paper suggests the expressions that predict effective elastic constants, dissipation properties and strength limits for symmetric layered structures under investigation. The study shows that balanced symmetric structure made up by four layers of composite may be regarded, with the accuracy sufficient for engineering calculations, as an orthotropic material for all loading conditions. At the same time, symmetric quasi-isotropic (in the reinforcement plane) structure made up by thirty two composite layers must be regarded as orthotropic in case of tension/compression and monoclinic in case of bending/twisting.

Conclusion. The study has shown the necessity to justify the application of experimental effective mechanical properties for uniaxial tension/compression to calculation of thin-walled layered composite structures exposed to bending/twisting.

Keywords: layered structure, composite, anisotropy, effective characteristics, elastic constants, dissipative properties, strength limits.

The authors declare no conflicts of interest.

Введение

Introduction

В настоящее время прогнозирование реакции слоистых композитов и конструкций из них на приложенные воздействия выполняется по одной из двух схем [1–7]. В первой схеме принимается, что слоистый материал состоит из однородных ортотропных или трансверсально-изотропных слоев. Материал рассчитывается последовательно слой за слоем по известным механическим свойствам каждого типа слоев, компонуемых в слоистую структуру. При этом требуется выполнять расчет полей деформаций и полей напряжений в каждом слое для каждого сочетания нагрузок и ориентации слоев. При использовании второй схемы слоистый материал считается однородным анизотропным (не обязательно ортотропным). В этом случае не требуется выполнять расчет полей деформаций и полей напряжений в каждом слое, поскольку данная схема основана на использовании эффективных характеристик слоистой структуры в целом. Однако для каждой из рассматриваемых структур армирования материала следует находить основные эффективные упругие, диссипативные и прочностные характеристики. По существу, вторая схема основана на замене неоднородного слоистого материала эквивалентным однородным слоем.

Традиционно при разработке конструкций используются экспериментальные величины эффективных характеристик слоистых композитов, определенные при испытаниях на одноосное растяжение/сжатие и сдвиг в плоскости армирования опытных образцов. Полученные результаты используются и для прогнозирования деформирования композит-

ных конструкций, к которым помимо мембранных усилий приложены изгибающие и крутящие моменты. При этом независимо от числа и ориентации компонуемых слоев по умолчанию предполагается существование трех плоскостей упругой симметрии слоистой структуры, т.е. слоистый композит рассматривается как ортотропный материал. В то же время очевидно, что зависящая только от относительного объемного содержания слоев компонуемых материалов величина любой эффективной характеристики при одноосном растяжении/сжатии и сдвиге может значительно отличаться от аналогичной величины при изгибе/кручении, на которую помимо относительного объемного содержания также влияет последовательность расположения слоев по толщине структуры. Поэтому эффективные свойства слоистых композитов должны определяться для заранее оговоренных условий нагружения.

Моделирование слоистого композита

Simulation of layered composite

Как правило, композитная структура представляет собой совокупность множества определенным образом ориентированных слоев различных материалов (рис. 1). Поскольку из конечного числа различных слоев композита ($k = \overline{1, n}$) можно скомпоновать бесконечное множество слоистых материалов, то идея их изучения экспериментальными методами выглядит нереалистичной. Более плодотворным является применение методов математического моделирования для прогнозирования упругих, диссипативных и прочностных характеристик слоистых композитных структур, в которых поми-

мо информации о количестве и последовательности укладки слоев используются экспериментально определенные величины геометрических и механических свойств компонуемых материалов.

В данной работе рассматриваются наиболее распространенные в технике симметричные слоистые композиты, характеризующиеся симметрией геометрии (толщин слоев, их расположения относительно срединной плоскости и ориентации относительно глобальной системы координат (X, Y, Z) и симметрией свойств материалов слоев относительно срединной плоскости слоистой структуры. Для симметричного слоистого композита система линейных алгебраических уравнений, связывающая усилия и деформации слоистой композитной структуры, записывается в виде [3–7]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где $(A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z^2) dz$, $(i, j = 1, 2, 6)$.

Здесь e_x, e_y, e_{xy} – элементы вектора мембранных и сдвиговых деформаций; k_x, k_y, k_{xy} – элементы вектора кривизны и кручения; h – суммарная толщина слоистого композита, \bar{Q}_{ij} – коэффициенты жесткости k -го моноклинного слоя композита (в системе координат (x, y, z)), связанные с коэффициентами жесткости ортотропного слоя Q_{ij} (в естественной системе координат 123) следующими соотношениями (рис. 1):

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} m^4 & 2m^2n^2 & n^4 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^4+n^4 & m^2n^2 & -4m^2n^2 \\ n^4 & 2m^2n^2 & m^4 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & -2m^2n^2 & m^2n^2 & (m^2-n^2)^2 \\ m^3n & mn(n^2-m^2) & -m^3n & 2mn(n^2-m^2) \\ mn^3 & mn(m^2-n^2) & -m^3n & 2mn(m^2-n^2) \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}_{(k)}, \quad (2)$$

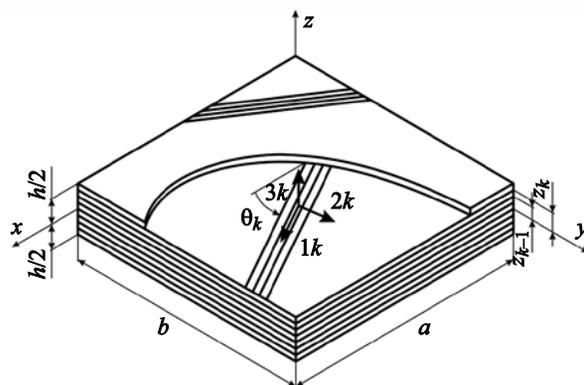


Рис. 1. Слоистая композитная структура
Fig. 1. Layered composite structure

где $m = \cos\theta$; $n = \sin\theta$; $Q_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{12} = -\nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = -\nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$; $Q_{66} = G_{12}$; E_1, E_2 – модули упругости в направлениях осей 1, 2; G_{12} – модуль сдвига в плоскости армирования; ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона.

Решая уравнения (1) относительно вектора деформаций, получим

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & 0 & 0 & 0 \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

В уравнениях (3) используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{A_{22}A_{66} - A_{26}^2}{|A|}, & a_{22} &= \frac{A_{11}A_{66} - A_{16}^2}{|A|}, \\ a_{12} &= \frac{A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66}}{|A|}, \\ a_{66} &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{|A|}, & a_{16} &= \frac{A_{12}A_{26} - A_{22}A_{16}}{|A|}, \\ a_{26} &= \frac{A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26}}{|A|}, \\ d_{11} &= \frac{D_{22}D_{66} - D_{26}^2}{|D|}, & d_{22} &= \frac{D_{11}D_{66} - D_{16}^2}{|D|}, \\ d_{12} &= \frac{D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}}{|D|}, \end{aligned}$$

$$d_{66} = \frac{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{|D|}, \quad d_{16} = \frac{D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16}}{|D|},$$

$$d_{26} = \frac{D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26}}{|D|},$$

где $|A| = \det[A] = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)A_{66} + 2A_{12}A_{26}A_{16} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2$,

$$|D| = \det[D] = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)D_{66} + 2D_{12}D_{26}D_{16} - D_{11}D_{26}^2 - D_{22}D_{16}^2.$$

Уравнения (1, 3) описывают упругую реакцию симметричного моноклинного слоистого композита, образованного совокупностью множества произвольно ориентированных слоев различных материалов, на приложенные к нему усилия. Однако структуры армирования подавляющего большинства композитных конструкций обладают определенной регулярностью, приводящей к упрощению общих соотношений. Далее рассмотрим две симметричные слоистые структуры: уравновешенный $[+\theta / -\theta /]_{ns}$ и квазиизотропный в плоскости армирования $[0^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 90^\circ]_{ns}$ слоистые композиты. Для рассматриваемых слоистых структур $A_{16} = A_{26} = 0$, $a_{16} = a_{26} = 0$ [7] и соотношения (1), (3) упрощаются:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ 0 & 0 & 0 & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Эффективные упругие постоянные

Effective elastic constants

Эффективные упругие постоянные находятся путем поочередного приложения к слоистым композитам либо мембранных усилий N_x , N_y , N_{xy} , либо изгиба-

ющих/крутящего моментов M_x , M_y , M_{xy} . Их величины определяются соотношениями, полученными из уравнений (4), (5).

При растяжении/сжатии:

$$\tilde{E}_x = 1/ha_{11}, \quad \tilde{E}_y = 1/ha_{22}, \quad \tilde{G}_{xy} = 1/ha_{66},$$

$$\tilde{\nu}_{xy} = -a_{12}/a_{11}, \quad \tilde{\nu}_{yx} = -a_{12}/a_{22},$$

$$\tilde{\mu}_{x,xy} = a_{16}/a_{66} = 0, \quad \tilde{\mu}_{y,xy} = a_{26}/a_{66} = 0,$$

$$\tilde{\mu}_{xy,x} = a_{16}/a_{11} = 0, \quad \tilde{\mu}_{xy,y} = a_{26}/a_{22} = 0.$$

При изгибе/кручении:

$$\tilde{E}_x = 12/h^3d_{11}, \quad \tilde{E}_y = 12/h^3d_{22}, \quad \tilde{G}_{xy} = 12/h^3d_{66},$$

$$\tilde{\nu}_{xy} = -d_{12}/d_{11}, \quad \tilde{\nu}_{yx} = -d_{12}/d_{22},$$

$$\tilde{\mu}_{x,xy} = d_{16}/d_{66} \neq 0, \quad \tilde{\mu}_{y,xy} = d_{26}/d_{66} \neq 0,$$

$$\tilde{\mu}_{xy,x} = d_{16}/d_{11} \neq 0, \quad \tilde{\mu}_{xy,y} = d_{26}/d_{22} \neq 0.$$

Здесь \tilde{E}_x , \tilde{E}_y – эффективные модули упругости; \tilde{G}_{xy} – эффективный модуль сдвига в плоскости армирования; $\tilde{\nu}_{xy}$, $\tilde{\nu}_{yx}$ – эффективные коэффициенты Пуассона; $\tilde{\mu}_{x,xy}$, $\tilde{\mu}_{y,xy}$ – эффективные коэффициенты взаимного влияния первого рода; $\tilde{\mu}_{xy,x}$, $\tilde{\mu}_{xy,y}$ – эффективные коэффициенты взаимного влияния второго рода.

Эффективные диссипативные характеристики

Effective dissipative properties

Для определения эффективных диссипативных характеристик симметричного слоистого композита – эффективных комплексных модулей упругости и эффективных комплексных модулей сдвига воспользуемся принципом упруго-вязкоупругого соответствия [7–9]. Для этого в уравнениях (4), (5) вещественные коэффициенты жесткости A_{ij} , D_{ij} , и вещественные коэффициенты податливости a_{ij} , d_{ij} слоистой структуры необходимо заменить соответствующими комплексными коэффициентами жесткости $A_{ij}^* = A_{ij}'(1 + i\eta_{Aij})$, $D_{ij}^* = D_{ij}'(1 + i\eta_{Dij})$ и комплексными коэффициентами податливости $a_{ij}^* = a_{ij}'(1 + i\eta_{a_{ij}})$, $d_{ij}^* = d_{ij}'(1 + i\eta_{d_{ij}})$.

Вещественные и мнимые части комплексных коэффициентов жесткости слоев композита вычисляются по соотношениям (2) путем замены упругих модулей E_i , G_{ij} каждого слоя слоистого компо-

зита соответствующими комплексными модулями $E_i^* = E_i'(1 + i \cdot \eta_i)$, $G_{ij}^* = G_{ij}'(1 + i \cdot \eta_{ij})$. Коэффициенты Пуассона считаются вещественными величинами. По вычисленным значениям вещественных и мнимых частей комплексных коэффициентов жесткости A_{ij}^* , D_{ij}^* в соответствии с (5) находятся комплексные коэффициенты податливости a_{ij}^* , d_{ij}^* .

Найденные вещественные и мнимые части эффективных комплексных модулей упругости $\tilde{E}_i^* = \tilde{E}_i'(1 + i \cdot \tilde{\eta}_i)$ и эффективных комплексных модулей сдвига $\tilde{G}_{ij}^* = \tilde{G}_{ij}'(1 + i \cdot \tilde{\eta}_{ij})$ позволяют определить эффективные диссипативные характеристики симметричного слоистого композита – эффективные коэффициенты механических потерь: $\tilde{\eta}_i = \text{Im } \tilde{E}_i / \text{Re } \tilde{E}_i = \tilde{E}'' / \tilde{E}'$, $\tilde{\eta}_{ij} = \text{Im } \tilde{G}_{ij} / \text{Re } \tilde{G}_{ij} = \tilde{G}'' / \tilde{G}'$.

Эффективные пределы прочности

Effective strength limits

Под термином «предельное состояние» слоистого композита понимается возникновение предельного состояния хотя бы в одном входящем в его состав слое. Поэтому задача определения эффективных пределов прочности симметричного слоистого композита сводится к нахождению предельного состояния каждого слоя, возникающего в результате поочередного приложения к слоистой структуре растягивающих/сжимающих и сдвиговых усилий, а также изгибающих/крутящих моментов с последующим выделением слоя, предельное состояние которого достигается при наименьших величинах приложенных усилий.

Для нахождения эффективных пределов прочности слоистого композита при растяжении/сжатии и сдвиге в плоскости армирования, используя соотношения (5), определим элементы вектора мембранных деформаций слоистого композита, порождаемых поочередным приложением растягивающих/сжимающих N_x , N_y и сдвигового N_{xy} усилий:

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

По найденным значениям элементов вектора деформаций (6) вычисляются величины элемен-

тов n векторов напряжений в каждом слое ($k = \overline{1, n}$) слоистой структуры в системе координат (xyz) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Преобразуя n векторов напряжений в каждом слое от системы координат (xyz) (7) к естественным системам координат $(123)_k$, запишем:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)}. \quad (8)$$

Подстановка элементов векторов (8) в определяющий предельное состояние слоя критерий прочности Цая – Ву

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 = 1 \quad (9)$$

позволяет найти n предельных значений растягивающих/сжимающих $\tilde{N}_x^{(k)} = \tilde{N}_x^{(k)}(\theta)$, $\tilde{N}_y^{(k)} = \tilde{N}_y^{(k)}(\theta)$ и сдвигового $\tilde{N}_{xy}^{(k)} = \tilde{N}_{xy}^{(k)}(\theta)$ усилий, соответствующих каждому слою слоистого композита. В равенстве (9) F_1 , F_2 и F_{11} , F_{12} , F_{22} , F_{66} – элементы вектора и матрицы прочности [7, 10–14]. В соответствии с принятым определением предельного состояния величины эффективных пределов прочности вычисляются как отношение наименьшего значения предельного приложенного усилия к площади поперечного сечения слоистой структуры.

Для нахождения эффективных пределов прочности слоистого композита при изгибе/кручении, используя соотношения (5), определим элементы вектора кривизны и кручения слоистого композита, порождаемых поочередным приложением изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

По найденным значениям элементов вектора кривизны и кручения (10) вычисляются величины элементов $2n$ векторов напряжений на верхних и нижних поверхностях каждого слоя ($k = \overline{1, n}$) слоистой структуры в системе координат (xyz) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = z_k \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Используя соотношения (8), преобразуем $2n$ векторов напряжений на верхних и нижних поверхностях каждого слоя слоистой структуры от системы координат (xyz) (9) к естественным системам координат $(123)_k$ $\{\sigma\}_k = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_6\}_k^T$. Подстановка элементов векторов $\{\sigma\}_k = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_6\}_k^T$ в критерии прочности слоя (9) позволяет определить $2n$ предельное значение изгибающих \hat{M}_x , \hat{M}_y и крутящего \hat{M}_{xy} моментов, соответствующих $2n$ верхним и нижним поверхностям каждого слоя слоистой структуры. Величины эффективных пределов прочности находятся по формулам

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{6\hat{M}_{x \min}^{(k)}}{h^2}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{6\hat{M}_{y \min}^{(k)}}{h^2}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = \frac{6\hat{M}_{xy \min}^{(k)}}{h^2}.$$

Численный эксперимент

Numerical experiment

Численные исследования выполнялись для уравновешенного $[+\theta / -\theta]_{ns}$ и квазиизотропного в плоскости армирования $[0^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 90^\circ]_{ns}$ симметричных слоистых композитов. Материал слоев – армированный тканью стеклопластик.

Графики функций $\tilde{E}_x = \tilde{E}_x(\theta)$, $\tilde{E}_y = \tilde{E}_y(\theta)$, $\tilde{G}_{xy} = \tilde{G}_{xy}(\theta)$, $\tilde{\nu}_{xy} = \tilde{\nu}_{xy}(\theta)$, $\tilde{\nu}_{yx} = \tilde{\nu}_{yx}(\theta)$ для слоистого композита $[+\theta / -\theta]_{ns}$ представлены на рис. 2. Здесь θ – угол между направлением армирующих слоев и направлением приложения усилия ($\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$). Аналогичные графики для слоистого композита $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ ($\theta \in [-180^\circ, 180^\circ]$) приведены на рис. 3.

На рис. 2, 3 и далее сплошными серыми линиями обозначены эффективные механические характеристики при одноосном растяжении/сжатии и сдвиге в плоскости армирования (t/c). Черные сплошные, пунктирные и точечные линии соответствуют аналогичным зависимостям при изгибе/кручении (b/T) для различных значений n . Здесь же приведены графики функций $|\Delta_{\alpha \max}| = |\Delta_{\alpha \max}(n)|$ ($\Delta_{\alpha} = [(\tilde{\alpha}_{t/c} / \tilde{\alpha}_{b/T}) - 1] \cdot 100\%$, $\tilde{\alpha} = \tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{G}_{xy}, \tilde{\nu}_{xy}, \dots$; n – число повторяющихся пакетов слоев, компонентов в слоистую структуру).

Из сопоставления приведенных на рис. 2 результатов следует, что при $n \geq 2$ расхождения между значениями эффективных упругих постоянных, вычисленных при растяжении/сжатии и при изгибе/кручении, удовлетворяют неравенствам $|\Delta_{\alpha \max}| \leq 1,5\%$ при $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Малость величин $\Delta_{\alpha \max}$ позволяет:

- с достаточной для инженерных расчетов точностью считать уравновешенный слоистый композит $[+\theta / -\theta]_{ns}$ ортотропным материалом,
- использовать определенные при одноосном растяжении/сжатии значения эффективных упругих постоянных для прогнозирования его деформирования при изгибе/кручении.

Представленные на рис. 3 результаты свидетельствуют о том, что по сравнению со слоистым композитом $[+\theta / -\theta]_{ns}$ слоистый композит $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ более чувствителен к влиянию последовательности расположения слоев по толщине структуры. Это подтверждается сопоставлением графиков эффективных упругих постоянных, определенных для различных условий нагружения.

Эффективные упругие постоянные, определенные путем поочередного приложения мембранных усилий в плоскости армирования, соответствуют изотропному материалу, т.к. $\tilde{E}_x(\theta) = \tilde{E}_y(\theta) = \text{const}$, $\tilde{G}_{xy}(\theta) = \text{const}$, $\tilde{\nu}_{xy}(\theta) = \tilde{\nu}_{yx}(\theta) = \text{const}$ при $\theta \in [-180^\circ, 180^\circ]$. В то же время при изгибе/кручении слоистый композит $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ классифицируется как моноклинный материал. Об этом свидетельствует зависимость эффективных упругих постоянных от числа компонентов в слоистую структуру повторяющихся пакетов слоев n .

Причем различным значениям n соответствуют разные моноклинные слоистые композиты. Это подтверждается различием значений аргумента θ , соответствующих экстремумам функций $\tilde{E}_x = \tilde{E}_x(\theta)$, $\tilde{E}_y = \tilde{E}_y(\theta)$, $\tilde{G}_{xy} = \tilde{G}_{xy}(\theta)$, $\tilde{\nu}_{xy} = \tilde{\nu}_{xy}(\theta)$, $\tilde{\nu}_{yx} = \tilde{\nu}_{yx}(\theta)$.

Расхождения между значениями эффективных упругих постоянных, определенные при растяжении/сжатии и изгибе/кручении, уменьшаются при увеличении числа повторяющихся пакетов слоев n . При $n \rightarrow \infty$ квазиизотропный в плоскости армирования слоистый композит в условиях изгиба/кручения может рассматриваться как однородный ортотропный материал.

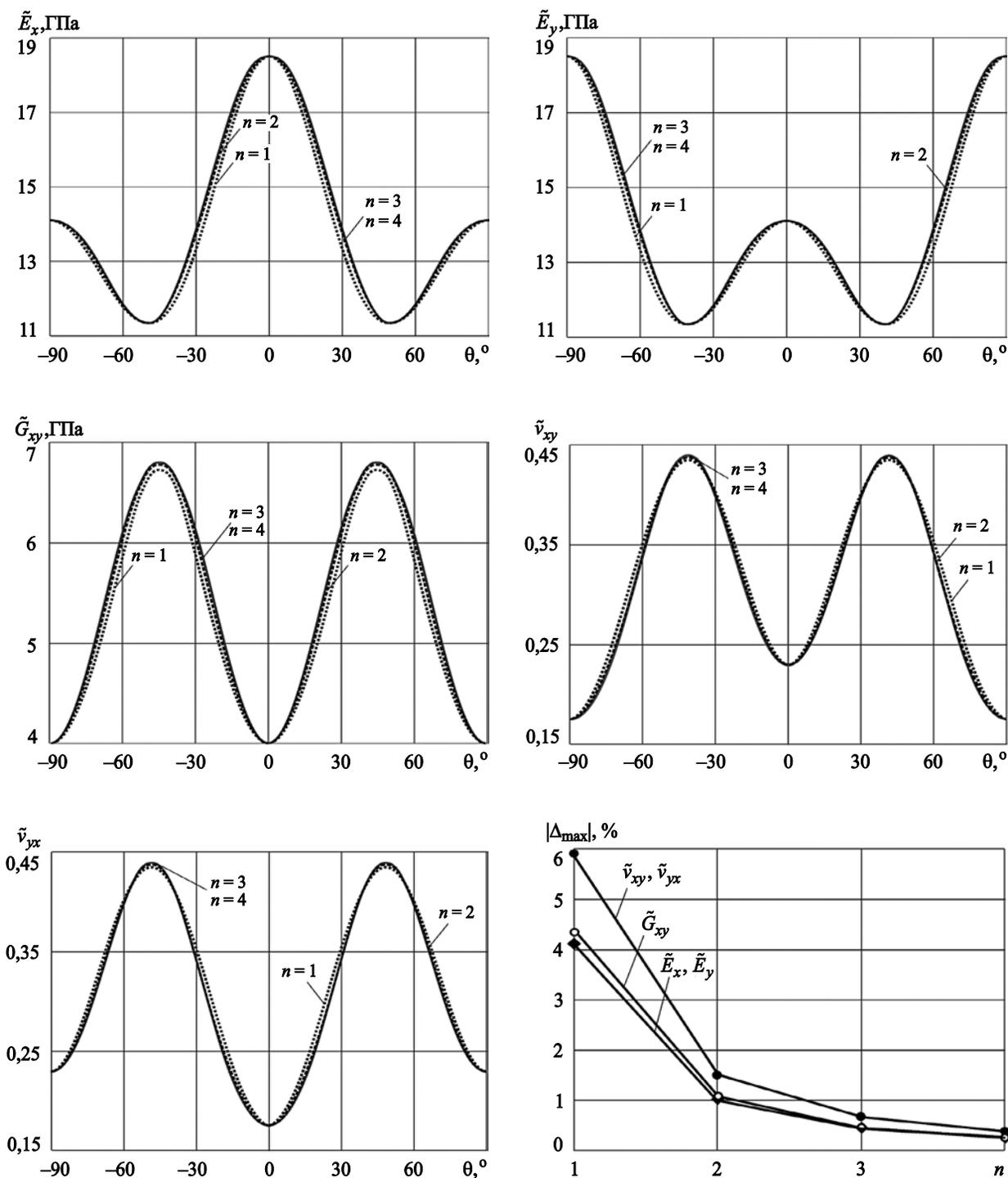


Рис. 2. Зависимости эффективных упругих постоянных уравновешенного симметричного слоистого композита от угла θ

Fig. 2. Effective elastic constants of balanced symmetric layered composite versus angle θ

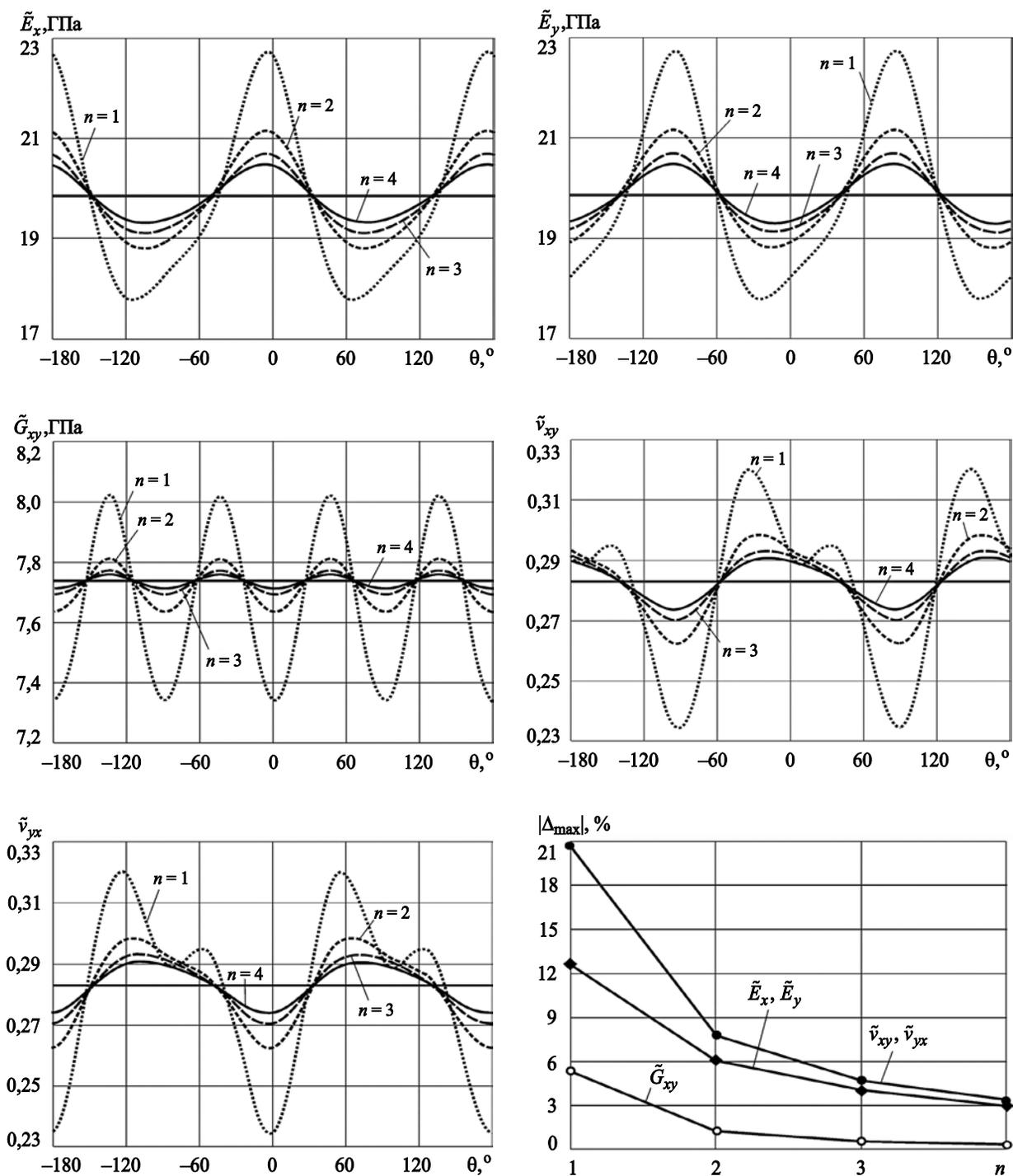


Рис. 3. Зависимости эффективных упругих постоянных квазиизотропного в плоскости армирования симметричного слоистого композита от угла θ

Fig. 3. Effective elastic constants of quasi-isotropic (in reinforcement plane) symmetric layered composite versus angle θ

Перейдем теперь к рассмотрению эффективных диссипативных характеристик рассматриваемых симметричных слоистых композитов.

На рис. 4 приведены графики функций $\tilde{\eta}_x = \tilde{\eta}_x(\theta)$, $\tilde{\eta}_y = \tilde{\eta}_y(\theta)$, $\tilde{\eta}_{xy} = \tilde{\eta}_{xy}(\theta)$ для слоистого композита $[+\theta / -\theta]_{ns}$. Анализ представленных результатов позволяет заключить, что при $n \geq 2$ расхождения между значениями эффективных коэффициентов механических потерь, вычисленных при квазигармоническом растяжении/сжатии и квазигармоническом изгибе/кручении, удовлетворяют неравенствам $|\Delta_{\alpha \max}| \leq 3\%$ при $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Учитывая точность экспериментального определения значений коэффициентов механических потерь $\pm(5-10)\%$, полученные расхождения можно

считать малыми. Таким образом, начиная с $n = 2$ можно приближенно считать слоистый композит $[+\theta / -\theta]_{ns}$ ортотропным однородным материалом и прогнозировать его диссипативные характеристики в условиях квазигармонического нагружения изгибом/кручением, используя величины аналогичных характеристик, найденных при квазигармоническом нагружении растяжением/сжатием.

Графики функций $\tilde{\eta}_x = \tilde{\eta}_x(\theta)$, $\tilde{\eta}_y = \tilde{\eta}_y(\theta)$, $\tilde{\eta}_{xy} = \tilde{\eta}_{xy}(\theta)$ для слоистого композита $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ приведены на рис. 5. Представленные результаты позволяют отметить, что значения эффективных коэффициентов механических потерь, вычисленные при квазигармоническом растяжении/сжатии, постоянны во всем диапазоне

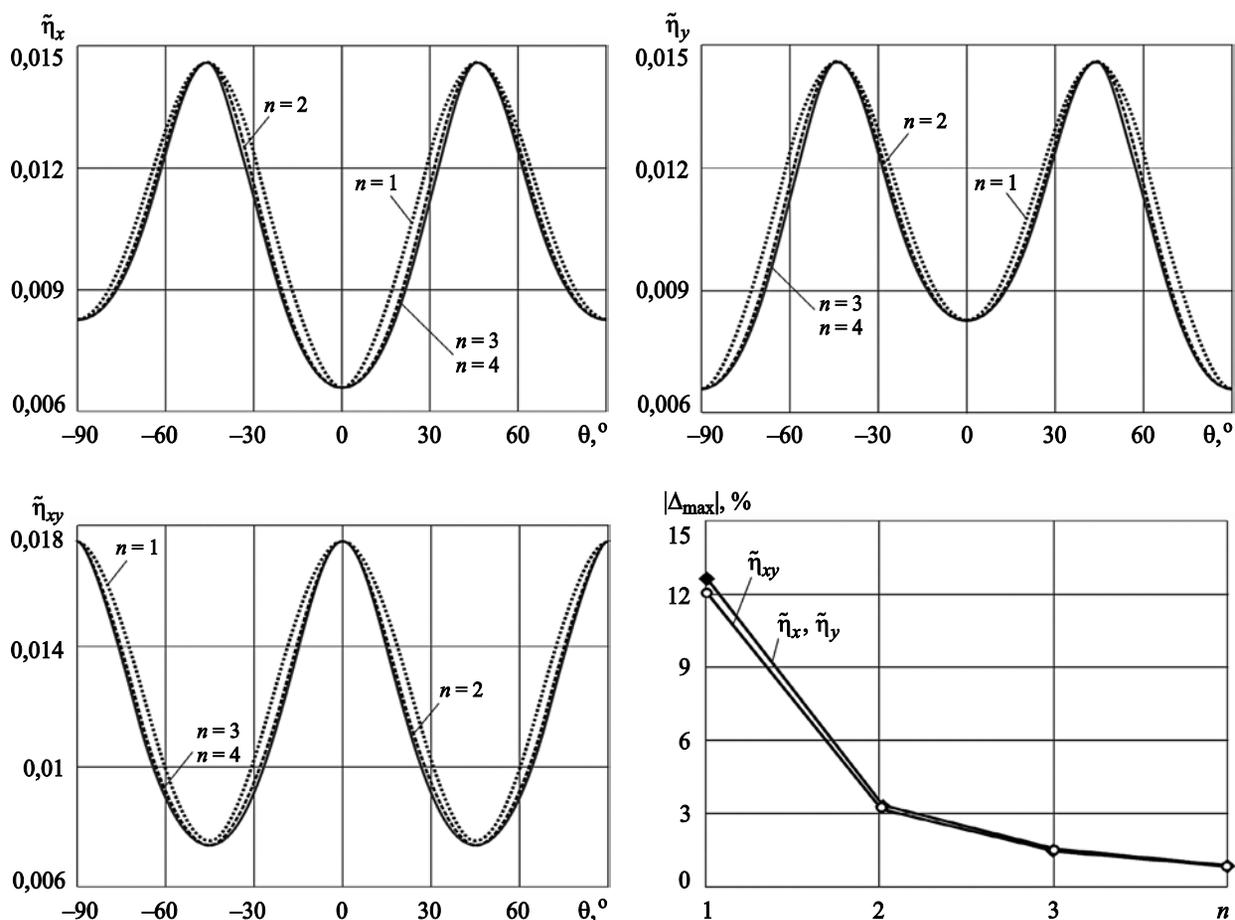


Рис. 4. Зависимости эффективных коэффициентов механических потерь уравновешенного симметричного слоистого композита от угла θ

Fig. 4. Effective mechanical loss coefficients of balanced symmetric layered composite versus angle θ

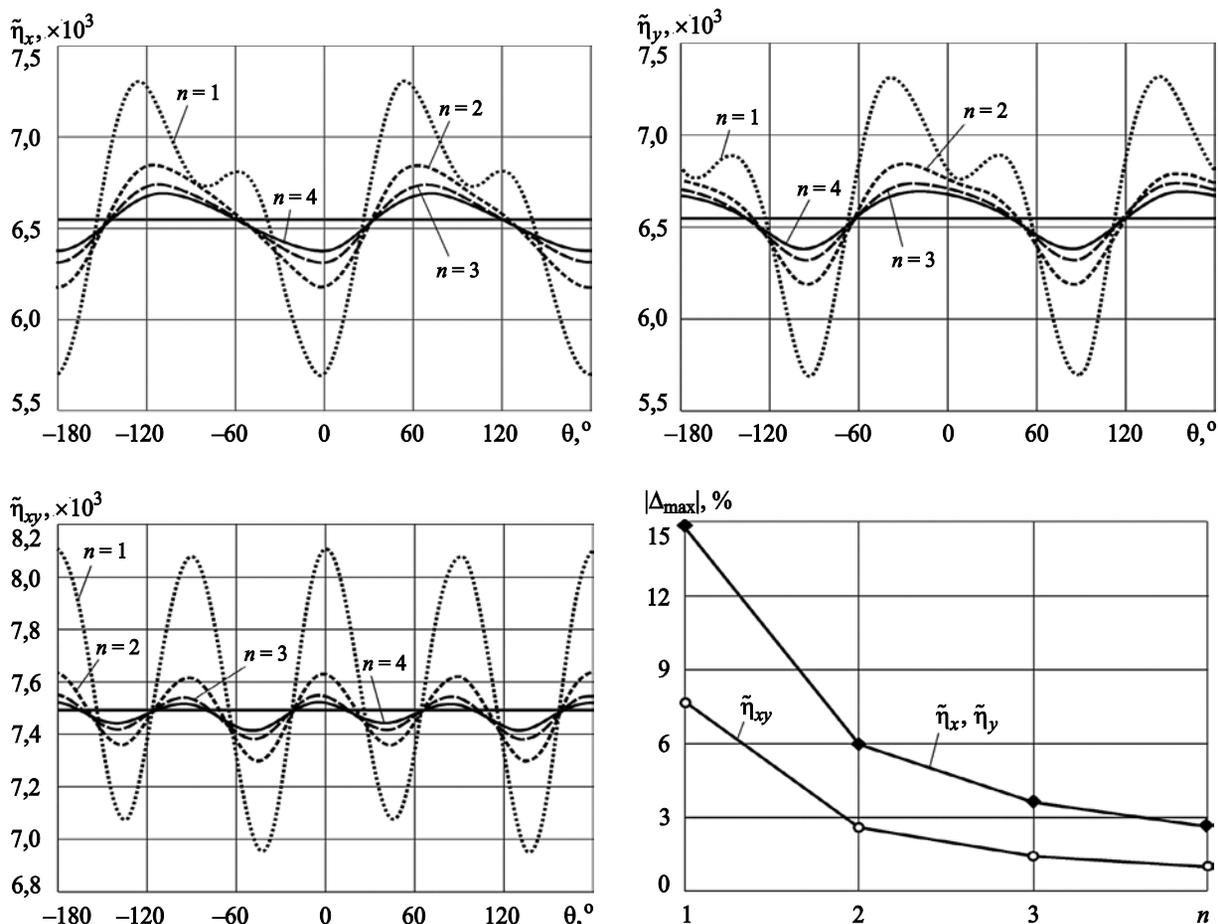


Рис. 5. Зависимости эффективных коэффициентов механических потерь квазиизотропного в плоскости армирования симметричного слоистого композита от угла θ

Fig. 5. Effective mechanical loss coefficients of quasi-isotropic (in reinforcement plane) symmetric layered composite versus angle θ

изменения угла $\theta \in [-180^\circ, 180^\circ]$. Значения $\tilde{\eta}_x = \tilde{\eta}_x(\theta)$, $\tilde{\eta}_y = \tilde{\eta}_y(\theta)$, $\tilde{\eta}_{xy} = \tilde{\eta}_{xy}(\theta)$, вычисленные при квазигармоническом изгибе/кручении, демонстрируют зависимость от числа компонуемых в слоистую структуру повторяющихся пакетов слоев n . Расхождения $|\Delta_{\alpha \max}|$ убывают по мере увеличения числа n . Начиная с $n \geq 5$, рассматриваемый квазиизотропный в плоскости армирования слоистый композит в условиях квазигармонического изгиба/кручения приближенно может рассматриваться как ортотропный материал.

Переходя к рассмотрению эффективных пределов прочности исследуемых слоистых композитов, сразу отметим, что их предельное состояние при

изгибе/кручении порождается сжимающими нормальными напряжениями, т.к. для каждого слоя композита, компонуемого в слоистые структуры, предел прочности при растяжении на 50–85 % превышает предел прочности при сжатии. Поэтому далее результаты сравнения значений эффективных пределов прочности слоистых композитов $[+\theta / -\theta]_{ns}$, $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ представлены для условий одноосного сжатия и изгиба/кручения.

Графики функций $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_x(\theta)$, $\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_y(\theta)$, $\tilde{\sigma}_{xy} = \tilde{\sigma}_{xy}(\theta)$ для слоистых композитов $[+\theta / -\theta]_{ns}$, $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ приведены на рис. 6, 7 соответственно.

Совместный анализ зависимостей, приведенных на рис. 6, 7, приводит к выводам, которые аналогичны выводам, сформулированным по результатам исследований упругих постоянных и диссипативных характеристик рассматриваемых слоистых композитов:

- уравновешенный слоистый композит $[+\theta / -\theta]_{ns}$ при $n \geq 2$ можно приближенно считать ортотропным однородным материалом и прогнозировать пределы его прочности при сжатии в условиях нагружения изгибом/кручением, используя значения аналогичных характеристик, полученные при испытаниях образцов на одноосное сжатие. Данное утверждение подтверждается справедливостью неравенства

$|\Delta_{\alpha \max}| \leq 1\%$ при $n \geq 2$ во всем диапазоне изменения угла $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$;

- эффективные пределы прочности симметричного слоистого композита $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ как в условиях одноосного растяжения/сжатия, так и в условиях изгиба/кручения являются функциями угла θ : $\tilde{\sigma}_x(\theta) \neq \text{const}$, $\tilde{\sigma}_y(\theta) \neq \text{const}$, $\tilde{\sigma}_{xy}(\theta) \neq \text{const}$, т.е. рассматриваемая слоистая структура не квазиизотропна. При одноосном растяжении/сжатии в плоскости армирования она должна классифицироваться как ортотропная. При изгибе/кручении слоистую структуру $[0^\circ + \theta / 45^\circ + \theta / -45^\circ + \theta / 90^\circ + \theta]_{ns}$ необходи-

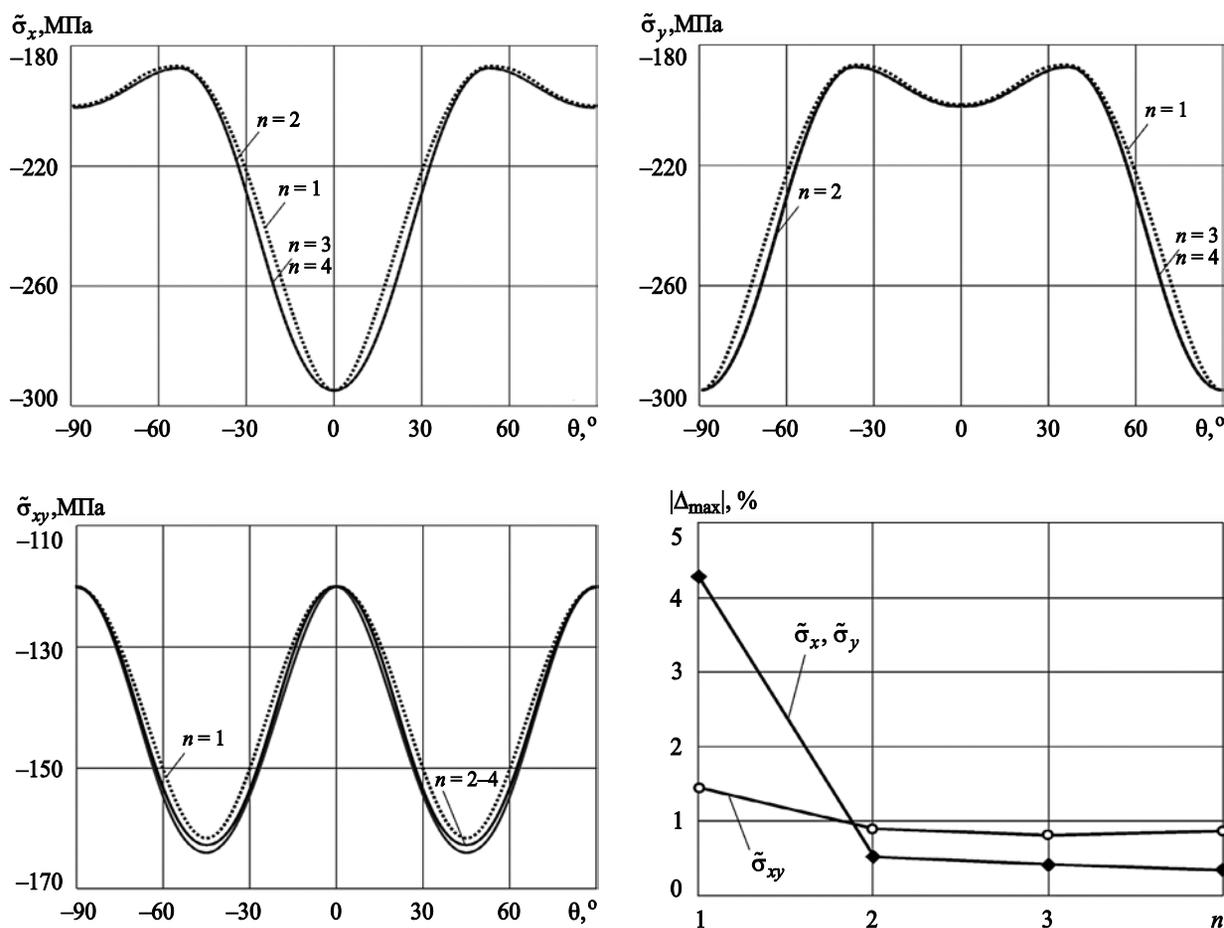


Рис. 6. Зависимости эффективных пределов прочности уравновешенного симметричного слоистого композита от угла θ

Fig. 6. Effective strength limits of balanced symmetric layered composite versus angle θ

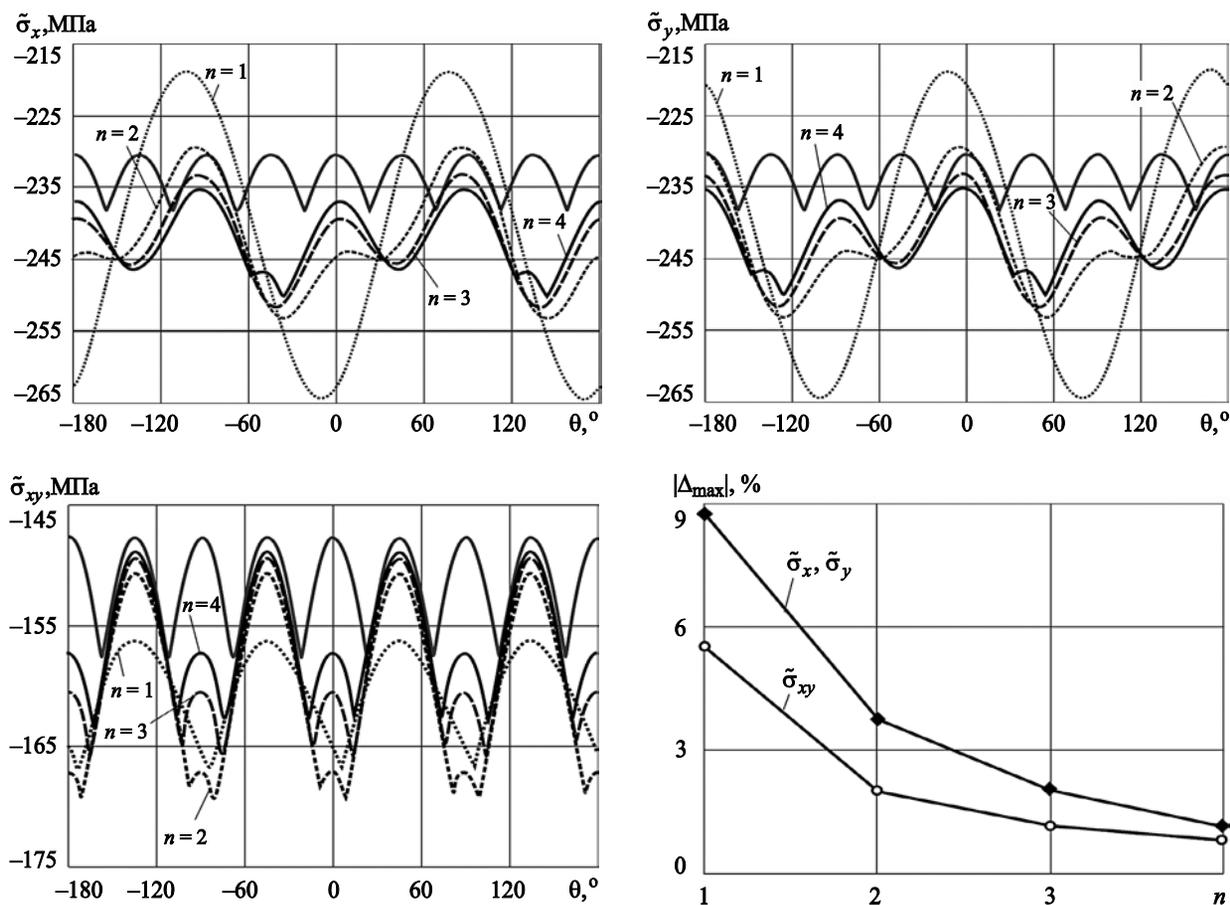


Рис. 7. Зависимости эффективных пределов прочности квазиизотропного в плоскости армирования симметричного слоистого композита от угла θ

Fig. 7. Effective strength limits of quasi-isotropic (in reinforcement plane) symmetric layered composite versus angle θ

мо признать моноклинной, которая только при $n \rightarrow \infty$ может рассматриваться как однородный ортотропный материал. Учитывая, что исследуемая слоистая структура компонуется из слоев композита с достаточно малой величиной отношения $E_1/E_2 = 1,4$, при увеличении отношения E_1/E_2 следует ожидать более зримого проявления описанных эффектов.

Заключение

Conclusion

Проведены результаты сравнительного анализа вычисленных для условий одноосного растяжения/сжатия и изгиба/кручения эффективных упругих постоянных, диссипативных характеристик

и пределов прочности для двух типов слоистых структур: уравновешенного симметричного слоистого композита и квазиизотропного в плоскости армирования симметричного слоистого композита. Показана необходимость обоснования использования экспериментальных величин эффективных механических характеристик, определенных в условиях одноосного растяжения/сжатия, для расчета тонкостенных слоистых композитных конструкций, эксплуатирующихся в условиях изгиба/кручения.

Список использованной литературы

1. Tsai S.W., Hahn H.T. Introduction to Composite Materials. Lancaster : Technomic, 1980. X, 455 p.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из компози-

- ционных материалов. Москва : Машиностроение, 1984. 264 с.
3. *Jones R.M.* Mechanics of composite materials. 2nd ed. Philadelphia : Taylor and Francies, 1999. XVI, 519 p.
 4. *Lee D.G., Suh N.P.* Axiomatic Design and Fabrication of Composite Structures: Applications in Robots, Machine Tools, and Automobiles. New York : Oxford University Press, 2006. IX, 709 p.
 5. *Mallick P.K.* Fiber Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design. 3rd ed. Boca Ration : CRC, 2008. 616 p.
 6. *Gibson R.F.* Principles of Composite Material Mechanics. 3rd ed. Boca Ration : CRC, 2011. 653 p.
 7. *Ярцев Б.А.* Введение в механику моноклинных композитов. Санкт-Петербург : Крыловский государственный научный центр, 2020. 224 с.
 8. *Ferry J.D.* Viscoelastic Properties of Polymers. 3rd ed. New York : Wiley, 1980. 641 p.
 9. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. 2nd ed. New York; London : Academic Press, 1982. 364 p.
 10. *Гольденблат И.И., Копнов В.А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. Москва : Машиностроение, 1968. 192 с.
 11. *Tsai S.W.* Strength Theories of Filamentary Structures // Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites. New York : Interscience, 1968. Ch. 1. P. 3–11.
 12. *Tsai S.W., Wu E.M.* A General Theory of Strength for Anisotropic Materials // Journal of Composite Materials. 1971. Vol. 5, № 1. P. 58–80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
 13. *Hinton M.J., Soden P.D., Kaddour A.S.* Failure Criteria in Fibre-Reinforced Polymer Composites: the worldwide failure exercise. Amersterdam; London : Elsevier, 2004. XII, 1255 p.
 14. *Политов А.Н., Татусь Н.А.* Биомеханика прочности волоконистых композитов. Москва : Физматлит, 2018. 328 с.
 5. *Mallick P.K.* Fiber Reinforced Composites: Materials, Manufacturing, and Design. 3rd ed. Boca Ration : CRC, 2008. 616 p.
 6. *Gibson R.F.* Principles of Composite Material Mechanics. 3rd ed. Boca Ration : CRC, 2011. 653 p.
 7. *B. Yartsev.* Introduction to Monoclinic Composite Mechanics. St. Petersburg, Krylov State Research Centre, 2020, 224 pp. (*in Russian*).
 8. *Ferry J.D.* Viscoelastic Properties of Polymers. 3rd ed. New York : Wiley, 1980. 641 p.
 9. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. 2nd ed. New York; London : Academic Press, 1982. 364 p.
 10. *I. Goldenblat, V. Kopnov.* Strength and plasticity criteria of structural materials. Moscow, Mashinostroyeniye, 1968, 192 pp. (*in Russian*).
 11. *Tsai S.W.* Strength Theories of Filamentary Structures // Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites. New York : Interscience, 1968. Ch. 1. P. 3–11.
 12. *Tsai S.W., Wu E.M.* A General Theory of Strength for Anisotropic Materials // Journal of Composite Materials. 1971. Vol. 5, № 1. P. 58–80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
 13. *Hinton M.J., Soden P.D., Kaddour A.S.* Failure Criteria in Fibre-Reinforced Polymer Composites: the worldwide failure exercise. Amersterdam; London : Elsevier, 2004. XII, 1255 p.
 14. *A. Politov, N. Tatus.* Strength biomechanics of fibered composites. Moscow, Fizmatlit, 2018, 328 pp. (*in Russian*).

References

1. *Tsai S.W., Hahn H.T.* Introduction to Composite Materials. Lancaster : Technomic, 1980. X, 455 p.
2. *N. Alfutov, P. Zinovyev, B. Popov.* Calculaiton of multi-layered plates and shells made of polymeric composites. Moscow, Mashinostroyeniye, 1984 (*in Russian*).
3. *Jones R.M.* Mechanics of composite materials. 2nd ed. Philadelphia : Taylor and Francies, 1999. XVI, 519 p.
4. *Lee D.G., Suh N.P.* Axiomatic Design and Fabrication of Composite Structures: Applications in Robots, Machine Tools, and Automobiles. New York : Oxford University Press, 2006. IX, 709 p.

Сведения об авторах

Лысенко Александр Петрович, инженер 1-й категории ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-46-10. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Паршина Людмила Валентиновна, к.т.н., старший научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8424-0903>.

Ярцев Борис Александрович, д.т.н., начальник сектора ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7443-1039>.

About the authors

Alexander P. Lysenko, 1st Category Engineer, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-46-10. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Lyudmila V. Parshina, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8424-0903>.

Boris A. Yartsev, Dr. Sci. (Eng.), Head of Sector, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7443-1039>.

Поступила / Received: 06.12.21

Принята в печать / Accepted: 10.03.22

© Лысенко А.П., Паршина Л.В., Ярцев Б.А., 2022