



DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-399-55-64
УДК 678.067-026.57+620.168.3+534.83

Б.А. Ярцев¹ , В.М. Рябов², Л.В. Паршина¹ 

¹ ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ТРЕХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУР. 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Объект и цель научной работы. Объектом исследования является трехслойная пластина, образованная двумя жесткими анизотропными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. Каждый жесткий слой представляет собой анизотропную структуру, формируемую конечным числом произвольно ориентированных ортотропных вязкоупругих слоев композитов. Цель работы – создание метода численного решения уравнений затухающих колебаний трехслойных безопорных прямоугольных пластин.

Материалы и методы. Для формирования системы алгебраических уравнений применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. Сначала находятся вещественные решения. Для нахождения комплексных собственных частот системы в качестве их начальных значений используются найденные вещественные собственные частоты, а затем вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка.

Основные результаты. Обсуждаются результаты исследования сходимости численного решения дифференциальных уравнений движения, выполненного на примере безопорной прямоугольной трехслойной пластины с трансверсально-изотропными жесткими слоями. Жесткие слои пластины выполнены из однонаправленного углепластика, упруго-диссипативные свойства которого в рассматриваемом диапазоне частот и температур не зависят от частоты колебаний. Для мягкого среднего изотропного слоя из вязкоупругого полимера температурно-частотная зависимость вещественной части комплексного модуля упругости и коэффициента механических потерь учтена. Оценка достоверности математической модели и метода численного решения, выполненная путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь для двух вариантов состава безопорной трехслойной пластины, продемонстрировала их хорошее согласование.

Закключение. Предложен метод численного решения уравнений затухающих колебаний трехслойной безопорной прямоугольной пластины, образованной двумя жесткими моноклинными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера.

Ключевые слова: метод решения, многочлены Лежандра, линейные алгебраические уравнения, демпфирование, сходимость численного решения, достоверность, собственная частота, коэффициент механических потерь.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-399-55-64
UDC 678.067-026.57+620.168.3+534.83

B. Yartsev¹ , V. Ryabov², L. Parshina¹ 

¹ Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

² St. Petersburg State Marine Technical University, Russia

DISSIPATIVE PROPERTIES OF THREE-LAYERED COMPOSITE STRUCTURES. 2. SOLUTION METHOD

Object and purpose of research. This paper discusses a three-layered plate made up by two rigid anisotropic layers and soft isotropic medium layer of viscoelastic polymer. Each of the two rigid layers is an anisotropic structure formed

Для цитирования: Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В. Диссипативные свойства трехслойных композитных структур. 2. Метод решения. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 1(399): 55–64.

For citations: Yartsev B., Ryabov V., Parshina L. Dissipative properties of three-layered composite structures. 2. Solution method. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 1(399): 55–64 (in Russian).

by a finite number of arbitrarily oriented orthotropic viscoelastic composite layers. The purpose of this work is to develop a numerical solution method for decaying vibration equations of three-layered unsupported rectangular plates.

Materials and methods. The system of algebraic equations is constructed as per Ritz method using Legendre polynomials as coordinate functions. The first step is to find real solutions. To find complex natural frequencies of the system, their initial values are taken as real natural frequencies thus found, with subsequent calculation of complex frequencies as per the method of third-order iterations.

Main results. This paper discusses the results of convergence analysis for a numerical solution of differential motion equations with respect to an unsupported rectangular three-layered plate with transversally isotropic rigid layers. The material for these rigid layers is uni-directional carbon-reinforced plastic (CRP) with elastic dissipation properties, within the investigated range of frequencies and temperatures, independent on its vibration frequency. For the soft isotropic medium layer of viscoelastic polymer, temperature-frequency curve governing the real part of complex elasticity modulus and mechanical loss coefficient is taken into account. Validation of the mathematical model and the numerical solution method, the comparison of calculated and experimental natural frequencies and mechanical loss coefficients for the two variants of three-layered unsupported plate has demonstrated their good correlation.

Conclusion. This paper suggests and validates the numerical solution method for decaying vibration equations of three-layered unsupported rectangular plate made up by two rigid monoclinic layers and soft isotropic medium layer of viscoelastic polymer.

Keywords: solution method, Legendre polynomials, linear algebraic equations, damping, numerical solution convergence, validation, natural frequency, mechanical loss coefficient.

The authors declare no conflicts of interest.

Введение

Introduction

Известно, что при построении низкочастотной части спектра собственных колебаний даже квазиоднородной прямоугольной пластины конечных размеров возникает трудность, связанная с удовлетворением граничных условий. Для изотропной или ортотропной пластины при шарнирном закреплении кромок можно получить решение в явном виде в результате разделения переменных. Для анизотропии более общего вида (моноклинной) указанное разделение переменных невозможно ни при каких граничных условиях. Поэтому для построения решения приходится прибегать к вариационным численным методам [1–3].

Метод решения уравнений затухающих колебаний трехслойной анизотропной пластины

Solution method for decaying vibration equations of three-layered anisotropic plate

Рассмотрим метод численного решения предложенных в [4] уравнений затухающих колебаний трехслойной безопорной прямоугольной пластины, образованной двумя жесткими моноклинными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. В дифференциальные уравнения движения и граничные условия неоднородной по толщине трехслойной прямоугольной пластины входят производные искомых функций, поэтому будем искать приближения в аналитическом виде,

а не численно, во избежание потери точности при последующем дифференцировании.

Сделаем линейные замены переменных $\xi = 2x/a - 1$, $\chi = 2y/b - 1$, переводящие прямоугольник $[0, a] \times [0, b]$ в квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1]$, и введем новые неизвестные функции

$$\bar{u}^{(r)}(\xi, \chi) = \tilde{u}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}a, \frac{\chi+1}{2}b\right),$$

$$\bar{\alpha}^{(r)}(\xi, \chi) = \tilde{\alpha}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}a, \frac{\chi+1}{2}b\right),$$

$$\bar{v}^{(r)}(\xi, \chi) = \tilde{v}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}a, \frac{\chi+1}{2}b\right),$$

$$\bar{\beta}^{(r)}(\xi, \chi) = \tilde{\beta}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}a, \frac{\chi+1}{2}b\right),$$

$$\bar{w}^{(r)}(\xi, \chi) = \tilde{w}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}a, \frac{\chi+1}{2}b\right),$$

которые будем искать в виде:

$$\bar{u}^{(r)}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u_{mn}^{(r)} \varphi_m(\xi) \psi_n(\chi),$$

$$\bar{\alpha}^{(r)}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{(r)} \varphi_m(\xi) \psi_n(\chi),$$

$$\bar{v}^{(r)}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} v_{mn}^{(r)} \varphi_m(\xi) \psi_n(\chi), \quad (1)$$

$$\bar{\beta}^{(r)}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} b_{mn}^{(r)} \varphi_m(\xi) \psi_n(\chi),$$

$$\bar{w}^{(r)}(\xi, \chi) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} w_{mn}^{(r)} \varphi_m(\xi) \psi_n(\chi).$$

В качестве координатных функций возьмем многочлены Лежандра, т.е. положим $\varphi_m(\xi) = P_m(\xi)$, $\psi_n(\chi) = P_n(\chi)$. Нам потребуются интегралы от произведений многочленов Лежандра и их производных, т.е. скалярные произведения вида

$$\langle \varphi_k^{(i)}, \varphi_j^{(m)} \rangle = \int_{-1}^1 \varphi_k^{(i)}(\xi) \varphi_j^{(m)}(\xi) d\xi,$$

$i, m = 0, 1, 2, i + m \leq 2$.

Известны следующие соотношения [5]:

$$P_k'(\xi) = \frac{k+1}{2} P_{k-1}^{(1,1)}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$P_m^{(1,1)}(1) = m + 1,$$

$$P_m^{(1,1)}(-1) = (-1)^m (m + 1),$$

из которых вытекают равенства

$$P_k'(1) = \frac{k+1}{2} P_{k-1}^{(1,1)}(1) = \frac{k+1}{2} k,$$

$$P_k'(-1) = \frac{k+1}{2} P_{k-1}^{(1,1)}(-1) = \frac{k+1}{2} (-1)^{k-1} k = \frac{k(k+1)}{2} (-1)^{k-1},$$

где (...)′ – символ производной по аргументу многочлена. Кроме того, $P_k(1) = 1$, $P_k(-1) = (-1)^k$.

Используя известные свойства многочленов Лежандра [5], находим

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \int_{-1}^1 P_k(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 2 / (2k + 1), & k = j. \end{cases}$$

Поскольку $\langle \varphi_k', \varphi_j' \rangle = \langle \varphi_j', \varphi_k' \rangle$, то достаточно рассмотреть случай $k \geq j$, тогда

$$\langle \varphi_k', \varphi_j' \rangle = \int_{-1}^1 \varphi_j'(\xi) d\varphi_k(\xi) = \frac{j(j+1)}{2} [1 + (-1)^{k+j}].$$

Теперь найдем $\langle \varphi_k', \varphi_j \rangle$. Если $k \leq j$, то

$$\langle \varphi_k', \varphi_j \rangle = \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) d\varphi_k(\xi) = \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) \varphi_k'(\xi) d\xi = 0,$$

а при $k > j$

$$\langle \varphi_k', \varphi_j \rangle = \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) d\varphi_k(\xi) = 1 - (-1)^{k+j}.$$

Итак,

$$\langle \varphi_k', \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & k \leq j, \\ 1 - (-1)^{k+j}, & k > j. \end{cases}$$

Наконец, интегралы вида

$$\begin{aligned} \langle \varphi_k'', \varphi_j \rangle &= \int_{-1}^1 \varphi_k''(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) d\varphi_k'(\xi) = \\ &= \varphi_j(\xi) \varphi_k'(\xi) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \varphi_k'(\xi) \varphi_j'(\xi) d\xi \end{aligned}$$

очевидным образом вычисляются через вышеприведенные результаты.

Многочлены Лежандра вычисляются по рекуррентной формуле:

$$P_n(\xi) = \frac{1}{n} [\xi(2n-1)P_{n-1}(\xi) - (n-1)P_{n-2}(\xi)], \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$P_0(\xi) = 1,$$

$$P_1(\xi) = \xi.$$

Учитывая гармонический закон колебаний и вид приближений (1), запишем необходимые условия стационарности функционала Гамильтона [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_{mn}^{(r)}} = \frac{\partial L}{\partial a_{mn}^{(r)}} = \frac{\partial L}{\partial v_{mn}^{(r)}} = \frac{\partial L}{\partial b_{mn}^{(r)}} = \frac{\partial L}{\partial w_{mn}^{(r)}} = 0, \\ m, n = 0, N-1. \end{aligned}$$

Эти условия представляют собой систему из $10N^2$ линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных коэффициентов представлений (1)

$$\begin{aligned} X = \{ & u_{00}^{(1)}, \dots, u_{N-1, N-1}^{(1)}, a_{00}^{(1)}, \dots, a_{N-1, N-1}^{(1)}, \dots, \\ & w_{00}^{(1)}, \dots, w_{N-1, N-1}^{(1)}, u_{00}^{(3)}, \dots, u_{N-1, N-1}^{(3)}, a_{00}^{(3)}, \dots, \\ & a_{N-1, N-1}^{(3)}, w_{00}^{(3)}, \dots, w_{N-1, N-1}^{(3)} \}^T, \end{aligned}$$

которую запишем в матричной форме

$$(C - \omega^2 M) X = 0. \quad (2)$$

Матрица жесткости C вычисляется по максимальной потенциальной энергии деформации трехслойной пластины U , а матрица масс M – по максимальной кинетической энергии трехслойной пластины T .

Заметим, что в случае полиномиальных координатных функций скорость сходимости метода Рунге зависит лишь от свойств решения (его гладкости) и может быть сколь угодно большой.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений реализован метод Жордана [6] с выбором главного элемента по всей матрице. Он оформлен в виде отдельной процедуры на языке C++.

Необходимым условием существования нетривиальных решений однородной системы (2) является равенство нулю ее определителя, т.е.

$$F(\omega) \equiv \det(C - \omega^2 M) = 0. \quad (3)$$

Это и есть уравнение для определения собственных частот колебаний. Будем их находить следующим образом: задаем некоторый диапазон $[\omega_{start}, \omega_{finish}]$, в котором, предположительно, расположена искомая частота, и пробегаем его с некоторым шагом, каждый раз вычисляя знак определителя $F(\omega)$. Если знак меняется, то соответствующий частичный интервал содержит частоту, при которой определитель равен нулю. Далее повторяем описанную процедуру для найденного частичного интервала, уменьшая шаг. Затем по найденной таким способом с требуемой точностью частоте находим какое-либо нетривиальное решение однородной системы, оно и определит соответствующую форму собственных колебаний.

При отсутствии температурно-частотной зависимости упруго-диссипативных характеристик для мягкого слоя вязкоупругого полимера матрица C не зависит от частоты ω и вычисляется один раз, как и матрица M , а затем они используются многократно. В противном случае с изменением частоты все элементы матрицы C необходимо вычислять заново, что резко увеличивает время вычислений описанным выше способом (порядок матрицы достаточно велик и равен $N_1 = 10N^2$).

Для преодоления этого затруднения поступим следующим образом: зададим некоторый начальный диапазон $[\omega_{start}, \omega_{finish}]$, содержащий искомую частоту, а затем вычислим упруго-диссипативные характеристики для слоя мягкого вязкоупругого полимера по некоторой фиксированной частоте из этого диапазона, например для $\omega = (\omega_{start} + \omega_{finish})/2$. После чего решим уравнение (3) с вычисленными постоянными матрицами C, M . Затем возьмем небольшую окрестность полученной частоты и будем повторять описанную процедуру до тех пор, пока не достигнем желаемой точности. Как правило, достаточно 4–5 шагов таких итераций.

В случае затухающих собственных колебаний искомые частоты суть комплексные числа, и указанный способ их нахождения неприменим.

Выберем в качестве начального приближения к искомой комплексной частоте комплексное число $\omega^{(0)}$, вещественная часть которого равна частоте упругих собственных колебаний с модулями, равными вещественным частям соответствующих комплексных модулей, а мнимая часть – произвольное

значение в пределах ожидаемого коэффициента механических потерь. После чего построим итерационную последовательность

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \frac{F(\omega^{(k)})}{F'(\omega^{(k)})} - \frac{F^2(\omega^{(k)})F''(\omega^{(k)})}{2F'^3(\omega^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Эта последовательность сходится с третьим порядком к искомой частоте, т.е. погрешность на следующем шаге приближенно равна кубу предыдущей погрешности [6].

Необходимые в расчетах производные точно определить невозможно, поэтому они находятся приближенно по формулам численного дифференцирования второго порядка точности

$$F'(z) \approx \frac{F(z+h_z) - F(z-h_z)}{2h_z},$$

$$F''(z) \approx \frac{F(z+h_z) - 2F(z) + F(z-h_z)}{h_z^2}$$

при подходящем выборе шага h_z в зависимости от точки z .

Следовательно, на каждом шаге итерации требуется трижды вычислять значение определителя большого порядка, что и определяет основное время работы программы.

Отметим, что на величину определителя влияют его порядок $N_1 = 10N^2$, значение искомой частоты ω , а также способ нормировки уравнений, позволяющий избежать промежуточных переполнений и исчезновений порядков чисел. С ростом N_1 определитель быстро убывает по модулю. Простейший эффективный способ масштабирования состоит в умножении каждой строки определителя на одно и то же число a , в результате чего он изменится в a^{N_1} раз. Например, при $a = 2$ и $N_1 = 1000$ имеем $a^{N_1} \approx 10^{300}$. Следовательно, достаточно взять $a \in [1, 2]$, чтобы удерживать величину определителя в разумных пределах.

По вычисленным величинам вещественных и мнимых частей комплексных собственных частот определяется коэффициент механических потерь.

Пусть $z = a + ib$ – произвольное комплексное число. Запишем его в тригонометрической форме

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \exp(i\varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \text{arctg}(a/b)$. Очевидно, $\sqrt{z} = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$.

Отметим, что при малых значениях величины a/b можно положить $\varphi \approx b/a$.

Искомая комплексная частота затухающих колебаний ω находится из уравнения (3). Положим,

$$\lambda = \omega^2 = \text{Re}\lambda + i\text{Im}\lambda = \text{Re}\lambda(1 + i\eta),$$

$$\text{где } \eta = \frac{\text{Im}\lambda}{\text{Re}\lambda}. \quad (4)$$

Величину (4) назовем коэффициентом механических потерь колебаний с частотой ω . Далее

$$\omega = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\text{Re}\lambda} \sqrt{1 + i\eta},$$

$$\sqrt{1 + i\eta} = \sqrt[4]{1 + \eta^2} \exp\left(i \frac{\text{arctg}\eta}{2}\right).$$

Находя отсюда вещественную и мнимую части комплексной собственной частоты, придем к соотношению

$$\frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega} = \text{tg} \frac{\text{arctg}\eta}{2},$$

откуда

$$\eta = \text{tg} \left(2 \text{arctg} \frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega} \right) = \frac{2 \frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega}}{1 - \left(\frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega} \right)^2}.$$

При малых $\frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega}$, получаем $\eta \approx 2 \frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega}$, что эквивалентно приближенной формуле

$$\eta \approx 2 \text{arctg} \frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega}.$$

Метод решения уравнений затухающих колебаний трехслойного ортотропного стержня

Solution method for decaying vibration equations of three-layered orthotropic rod

Метод численного решения уравнений затухающих колебаний трехслойного безпорного стержня легко получить как частный случай общего метода. Для этого сделаем линейную замену переменной

$\xi = 2x/l - 1$, переводящую отрезок $[0, l]$ в отрезок $[-1, 1]$ и введем новые неизвестные функции

$$\bar{u}^{(r)}(\xi) = \tilde{u}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}l\right), \quad \bar{\alpha}^{(r)}(\xi) = \tilde{\alpha}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}l\right),$$

$$\bar{w}^{(r)}(\xi) = \tilde{w}^{(r)}\left(\frac{\xi+1}{2}l\right),$$

которые будем искать в виде:

$$\bar{u}^{(r)}(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1} u_m^{(r)} \varphi_m(\xi), \quad \bar{\alpha}^{(r)}(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m^{(r)} \varphi_m(\xi),$$

$$\bar{w}^{(r)}(\xi) = \sum_{m=0}^{N-1} w_m^{(r)} \varphi_m(\xi), \quad (5)$$

где $\varphi_m(\xi) = P_m(\xi)$ – многочлены Лежандра.

Формулы для вычисления многочленов Лежандра и их производных, а также необходимых далее скалярных произведений приведены ранее. Подставим разложения (5) в функционал Гамильтона [4]. Чтобы этот функционал достигал экстремума, необходимо выполнение следующих равенств:

$$\frac{\partial L}{\partial u_m^{(r)}} = \frac{\partial L}{\partial a_m^{(r)}} = \frac{\partial L}{\partial w_m^{(r)}} = 0, \quad m = \overline{0, N-1}.$$

Эти условия представляют собой систему из $6N$ линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных коэффициентов представлений (5), записываемую в форме (2). Способ определения искомых комплексных собственных частот описан выше.

Оценка сходимости предложенного метода

Convergence assessment of the suggested method

Сходимость предложенного метода численного решения дифференциальных уравнений движения трехслойных неоднородных композитных структур исследовалась на примере прямоугольной трехслойной пластины ($a = 0,16$ м, $b = a/4 = 0,04$ м) путем варьирования числом координатных функций N^2 по обеим независимым пространственным переменным x, y . Жесткие слои трехслойной пластины толщиной $h_{(1)} = h_{(3)} = h = a/100 = 0,0016$ м = const представляют собой квазиоднородные структуры, образованные совокупностью конечного числа армирующих слоев углепластика HMS/DX-209.

Ориентация всех армирующих слоев, относительно связанных с направлениями осей пластины

глобальных систем координат $x_{(1)}y_{(1)}z_{(1)}$ и $x_{(3)}y_{(3)}z_{(3)}$, считалась одинаковой $\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = 0^\circ$. Предполагалось, что в рассматриваемом диапазоне изменения температур упруго-диссипативные характеристики однонаправленного углепластика HMS/DX-209 частотно независимы, т.е. постоянны ($\rho = 1580 \text{ кг/м}^3$, $E_{11} = 191(1 + i \cdot 7,8 \cdot 10^{-4}) \text{ ГПа}$, $E_{22} = 5(1 + i \cdot 6,7 \cdot 10^{-3}) \text{ ГПа}$, $G_{12} = G_{13} = 3(1 + i \cdot 1,16 \cdot 10^{-2}) \text{ ГПа}$, $G_{23} = 2,5(1 + i \cdot 1,15 \cdot 10^{-2}) \text{ ГПа}$, $\nu_{12} = 0,279$).

Значения вещественных частей комплексных модулей упругости и сдвига слоя HMS/DX-209 и соответствующих коэффициентов механических потерь вычислялись по предложенным в работе [7] соотношениям микромеханики. Необходимые для расчета упруго-диссипативные свойства матрицы и армирующих волокон приведены в [8]. Жесткие слои связаны между собой мягким слоем изотропного вязкоупругого полимера толщиной $h_{[2]} = 0,00032 \text{ м}$. Полученные в результате обработки экспериментальных данных температурно-частотные зависимости вещественной части комплексного модуля упругости $\text{Re}E(f, T_C)$ и коэффициента механических потерь $\eta = \eta(f, T)$ вязкоупругого полимера ВДМ-2 ($\nu \approx 0,5$, $\rho = 1290 \text{ кг/м}^3$) приведены на рис. 1.

Исследования сходимости численного решения выполнялись для трехслойной пластины с относительной толщиной мягкого слоя вязкоупругого полимера $\bar{h} = h_{[2]}/h = 0,2$ при трех значениях температуры окружающей среды: $T_C = 0^\circ\text{C}$, 20°C , 40°C . Каждому значению T_C соответству-

ют существенно отличные величины вещественной части комплексного модуля упругости и коэффициента механических потерь изотропного вязкоупругого полимера.

Полученные результаты приведены на рис. 2 в виде графиков зависимостей нормированных собственных частот $\tilde{f}_i = f_{i(N=j)}/f_{i(N=11)}$ и коэффициентов механических потерь $\tilde{\eta}_i = \eta_{i(N=j)}/\eta_{i(N=11)}$ первых шести тонов колебаний рассматриваемой пластины ($i = \overline{1, 6}$). Здесь $f_{i(N=j)}$, $\eta_{i(N=j)}$ – значения собственной частоты и коэффициента механических потерь i -го тона колебаний при $j = \overline{6, 11}$. Совместный анализ полученных результатов позволяет отметить быструю сходимость решения, поскольку при $j \geq 8$ для всех рассмотренных случаев $\tilde{f}_i \rightarrow 1$ и $\tilde{\eta}_i \rightarrow 1$.

Оценка достоверности предложенного метода

Validation of the suggested method

Оценка достоверности предложенной математической модели и разработанного метода численного решения дифференциальных уравнений движения проводилась путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь безпорных трехслойных пластин. Для этого были изготовлены две серии трехслойных пластин (по четыре образца в серии: $a = 0,25 \text{ м}$, $b = 0,04 \text{ м}$).

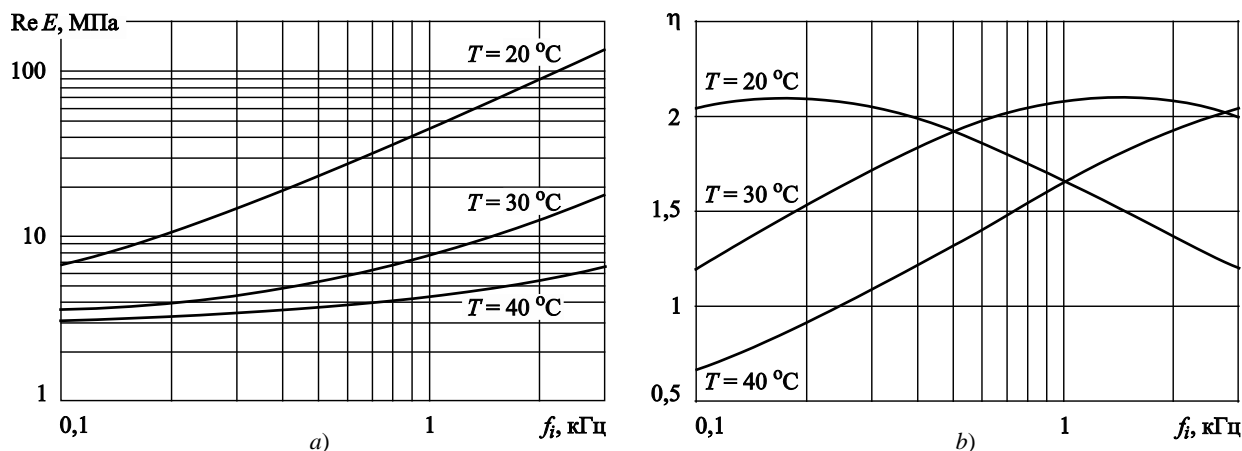


Рис. 1. Частотные зависимости: а) вещественной части комплексного модуля упругости, б) коэффициента механических потерь вязкоупругого полимера ВДМ-2 при фиксированных значениях температуры окружающей среды $T_C = \text{const}$

Fig. 1. Frequency curves for а) real part of complex elasticity modulus and б) mechanical loss coefficient of viscoelastic polymer VDM-2 at fixed ambient temperatures ($T_C = \text{const}$)

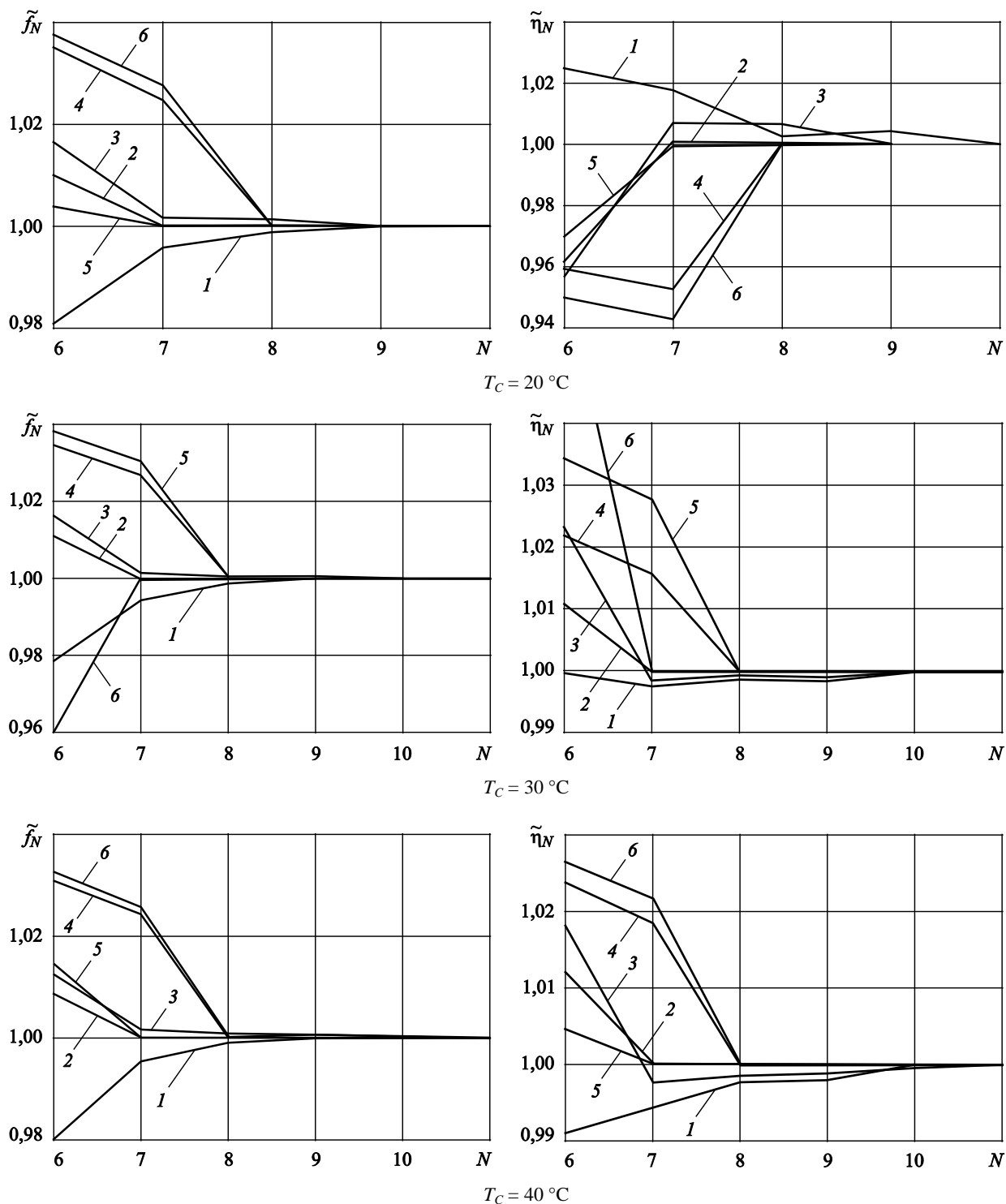


Рис. 2. Сходимость численного решения при нахождении значений собственных частот и значений коэффициентов механических потерь в зависимости от размерности системы координатных функций
Fig. 2. Convergence of numerical solution for natural frequencies and mechanical loss coefficients depending on the order of coordinate function system

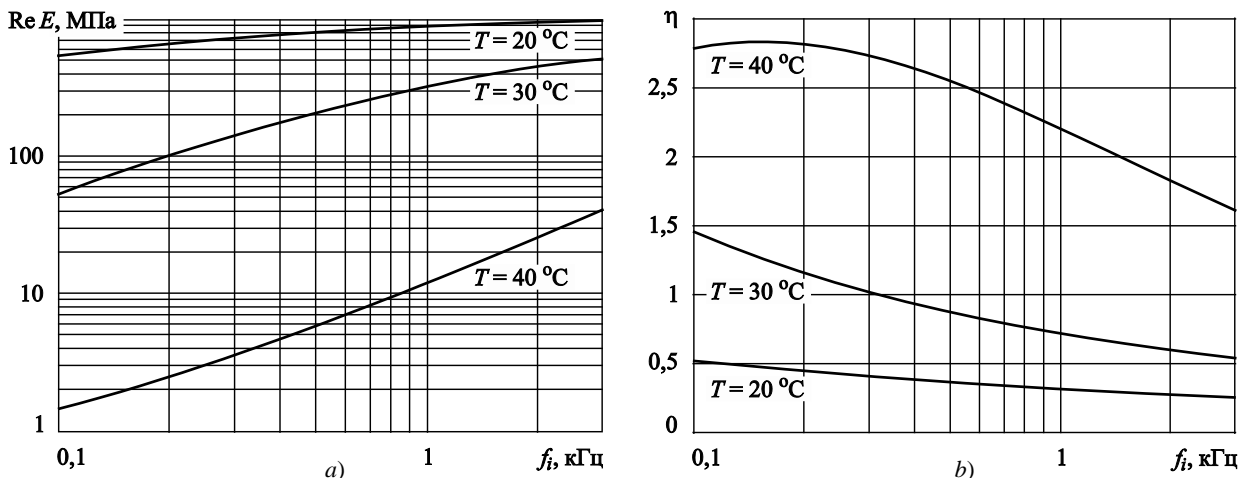


Рис. 3. Частотные зависимости: а) вещественной части комплексного модуля упругости, б) коэффициента механических потерь вязкоупругого полимера ВДМ-1 при фиксированных значениях температуры окружающей среды $T_c = \text{const}$

Fig. 3. Frequency curves for а) real part of complex elasticity modulus and б) mechanical loss coefficient of viscoelastic polymer VDM-2 at fixed ambient temperatures

Жесткие слои трехслойных пластин выполнялись из однонаправленного углепластика CM-Preg-C-230/600 CP004 39 ($h_{(1)} = h_{(3)} = h = 0,005$ м; $\theta_1 = \theta_3 = \theta = 0^\circ$). Мягкий слой трехслойных пластин первой серии выполнялся из вязкоупругого полимера ВДМ-1 ($h_{(2)} = 0,0006$ м), а трехслойных пластин второй серии – из вязкоупругого полимера ВДМ-2 ($h_{(2)} = 0,001$ м). Упруго-диссипативные характеристики однонаправленного углепластика

CM-Preg-C-230/600 CP004 39 ($\rho = 1500$ кг/м³, $E_{11} = 120(1 + i \cdot 9 \cdot 10^{-4})$ ГПа, $E_{22} = 8(1 + i \cdot 9,6 \cdot 10^{-3})$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 4,4(1 + i \cdot 1,6 \cdot 10^{-2})$ ГПа, $G_{23} = 2,7(1 + i \cdot 1,5 \cdot 10^{-2})$ ГПа, $\nu_{12} = 0,27$) и вязкоупругих полимеров (рис. 1, 3) определялись экспериментально.

Экспериментальные значения собственных частот $f_{i \text{ exp}}$ и соответствующих им коэффициентов механических потерь $\eta_{i \text{ exp}}$ i -го тона поперечных

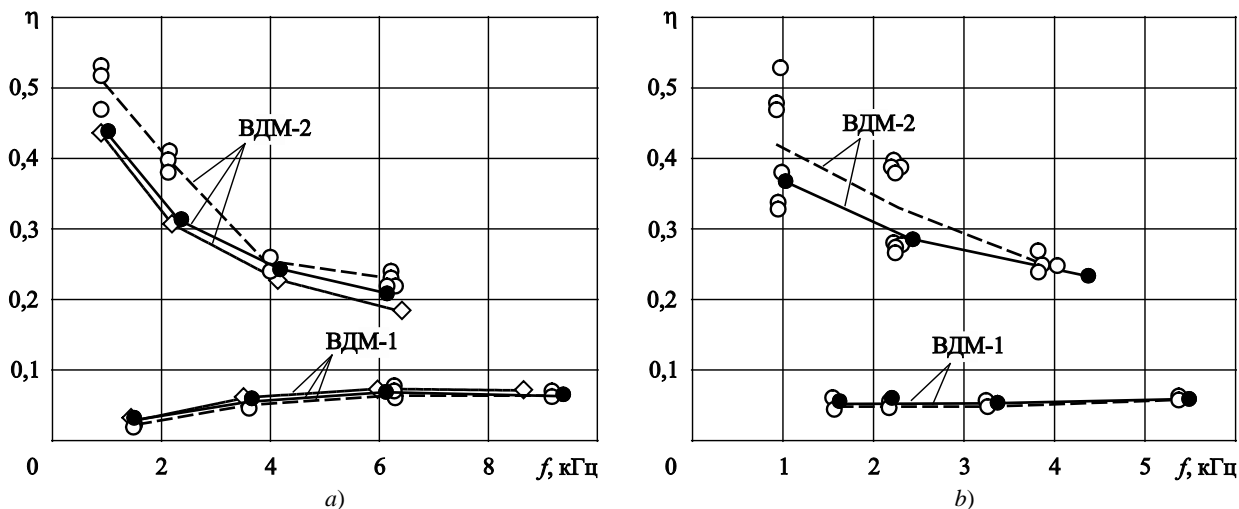


Рис. 4. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь: а) изгибных и б) крутильных колебаний безопорной трехслойной пластины ($\theta = \theta_1 = \theta_3 = 0^\circ$, $T_c = 23$ °C)

Fig. 4. Calculated vs experimental natural frequencies and mechanical loss coefficients of а) bendings and б) torsions of unsupported three-layered plate ($\theta = \theta_1 = \theta_3 = 0^\circ$, $T_c = 23$ °C)

колебаний безопорных трехслойных пластин определялись резонансным методом при $T_C = 23$ °С.

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений собственных частот $f_{i\text{ cal}}, f_{i\text{ exp}}$ и коэффициентов механических потерь $\eta_{i\text{ cal}}, \eta_{i\text{ exp}}$ изгибных ($i = 1, 4$) и крутильных ($i = 1, 3$) колебаний трехслойных пластин приведено на рис. 4. На этом рисунке сплошными линиями представлены зависимости $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$, вычисленные по модели трехслойной пластины, точками обозначены результаты эксперимента, а пунктирными линиями – средние экспериментальные значения. Помимо этого, на рис. 4а точечными линиями обозначены расчетные зависимости, полученные по модели глобально ортотропного трехслойного стержня.

При анализе приведенных на рис. 4 расчетных и экспериментальных зависимостей $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$ и $\eta_{i\text{ exp}} = \eta_{i\text{ exp}}(f)$ необходимо учитывать, что свойства выпускаемых промышленностью вязкоупругих полимеров могут изменяться от партии к партии, к тому же фирмы время от времени вносят изменения в их состав или в процесс изготовления, и характеристики, представляемые изготовителями, не могут быть полностью гарантированы [9, 10].

Сопоставление полученных результатов позволяет утверждать, что использование обоих методов прогнозирования диссипативных свойств приводит к хорошему согласованию с экспериментальными данными. Расхождения $\Delta f_i = [(f_{i\text{ cal}}/f_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$, $\Delta \eta_i = [(\eta_{i\text{ cal}}/\eta_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$ между значениями $f_{i\text{ cal}} = f_{i\text{ cal}}(f)$ и $f_{i\text{ exp}} = f_{i\text{ exp}}(f)$, $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(f)$ и $\eta_{i\text{ exp}} = \eta_{i\text{ exp}}(f)$ возрастают по мере увеличения демпфирующей способности механической системы, но для всех рассмотренных случаев справедливы неравенства $\Delta f_i \leq |10\%|$, $\Delta \eta_i \leq |15\%|$. Следовательно, достоверность предложенных математических моделей и разработанных методов численного решения дифференциальных уравнений движения обоснована.

Заключение

Conclusion

В работе предложен метод численного решения уравнений затухающих колебаний трехслойной безопорной прямоугольной пластины, образованной двумя жесткими моноклинными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. Приведены оценки сходимости и достоверности этого метода, выполненные на примере трехслойной пластины с трансверсально-изотропными жесткими слоями из однонаправленного углепластика. В продолжении статьи будут

обсуждены результаты численных экспериментов, выполненных путем рассмотрения симметричных и асимметричных трехслойных пластин.

Список использованной литературы

1. *Товстик П.Е.* Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). Вып. 1. С. 157–169.
2. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates / A.K. Belyaev, N.F. Morozov, P.E. Tovstik, T.P. Tovstik // Acta Mech. Published online: 28 May 2019.
3. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 2. Метод решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5(63). Вып. 4. С. 678–688.
4. *Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В.* Диссипативные свойства трехслойных композитных структур. 1. Постановка задачи // Труды Крыловского государственного научного центра. 2021. № 4(398). С. 24–34.
5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. Москва : Физматлит. 2007. 480 с.
6. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Москва : Физматлит. 1962. Т. 2. 640 с.
7. *Saravanos D.A., Chamis C.C.* Unified micromechanics of damping for unidirectional and off-axis fiber composites // Journal of Composite Technology & Research. 1990. Vol. 12. No. 1. P. 31–40.
8. *Saravanos D.A., Chamis C.C.* An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures // Polymer Composites. 1990. Vol. 11. No. 6. P. 328–336.
9. *Наишиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. Москва : Мир. 1988. 448 с.
10. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review / X.Q. Zhou, D.Y. Yu, X.Y. Shao [et al.] // Composite Structures. 2016. Vol. 136. P. 460–480.

References

1. *Tovstik P.E.* Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate // Pleiades Publishing, Ltd., Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2019. Vol. 52. No. 1. P. 112–121.
2. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates / A.K. Belyaev, N.F. Morozov, P.E. Tovstik, T.P. Tovstik // Acta Mech. Published online: 28 May 2019.
3. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy Dissipation during Vibrations of Heterogeneous Composite

- Structures: 2. Method of Solution. // Pleiades Publishing, Ltd. Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. 2018. Vol. 51. No. 4. P. 413–420.
4. *B. Yartsev, V. Ryabov, L. Parshina.* / Dissipative properties of three-layered composite structures. 1. Statement of problem // Transactions of Krylov State Research Centre, 2021, No. 4(398), pp. 24–34 (in Russian).
 5. *P. Suetin.* Classic orthogonal polynomials. Moscow, Fizmatlit, 2007, 480 pp. (in Russian).
 6. *I. Berezin, N. Zhidkov.* Calculation methods. Moscow, Fizmatlit, 1962, Vol. 2, 640 pp. (in Russian).
 7. *Saravanos D.A., Chamis C.C.* Unified micromechanics of damping for unidirectional and off-axis fiber composites // Journal of Composite Technology & Research. 1990. Vol. 12. No. 1. P. 31–40.
 8. *Saravanos D.A., Chamis C.C.* An integrated methodology for optimizing the passive damping of composite structures // Polymer Composites. 1990. Vol. 11. No. 6. P. 328–336.
 9. *Nashif A.D., Johnes D.I.G., Henderson J.P.* Vibration Damping. 1985. JohnWiley & Sons. 480 p.
 10. Research and applications of viscoelastic vibration damping materials: A review / *X.Q. Zhou, D.Y. Yu, X.Y. Shao* [et al.] // Composite Structures. 2016. Vol. 136. P. 460–480.

Сведения об авторах

Ярцев Борис Александрович, д.т.н., начальник сектора ФГУП «Крыловский государственный научный

центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7443-1039>.

Рябов Виктор Михайлович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой «Вычислительная математика» Санкт-Петербургского государственного университета. Адрес: 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9. Тел.: +7 (812) 543-83-37. E-mail: v.ryabov@spbu.ru. *Паршина Людмила Валентиновна*, к.т.н., старший научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@ksrc.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8424-0903>.

About the authors

Boris A. Yartsev, Dr. Sci. (Eng.), Head of Sector, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7443-1039>.

Viktor M. Ryabov, Dr. Sci. (Phys.&Math.), Head of Computational Mathematics Department, St. Petersburg State University. Address: 7–9, Universitetskaya Embankment, St. Petersburg, Russia, post code 199034. Tel.: +7 (812) 543-83-37. E-mail: v.ryabov@spbu.ru.

Lyudmila V. Parshina, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@ksrc.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8424-0903>.

Поступила / Received: 11.11.21
Принята в печать / Accepted: 10.03.22
© Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В., 2022