



DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-51-58
УДК 678.067:620.168.3+534.83

Б.А. Ярцев¹ , В.М. Рябов², Л.В. Паршина¹ 

¹ ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

ДИССИПАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ТРЕХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУР. 3. ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объект и цель научной работы. Объектом исследования является трехслойная пластина, образованная двумя жесткими анизотропными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера. Каждый жесткий слой представляет собой анизотропную структуру, формируемую конечным числом произвольно ориентированных ортотропных вязкоупругих слоев композитов. Цель работы – выбор объектов исследования, демонстрирующих основные особенности параметров собственных затухающих колебаний трехслойных пластин.

Материалы и методы. Качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих затухающие колебания анизотропных пластин различных составов и структур армирования.

Основные результаты. В качестве основных объектов исследования рассматриваются две специальные структуры армирования жестких слоев, komponуемых из однонаправленных слоев углепластика: симметричная и асимметричная. Симметричная структура образована совокупностью однонаправленных слоев углепластика, одинаково ориентированных относительно глобальных осей этих слоев. В асимметричной структуре однонаправленные слои углепластика ориентированы в противоположных направлениях относительно глобальных осей жестких слоев.

Приводятся результаты численного исследования параметров динамического отклика квазиоднородной моноклинной пластины. Показано, что связанные колебания симметричной трехслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений, аналогичными системам уравнений, характерных для затухающих колебаний квазиоднородной моноклинной пластины. В то же время связанные колебания асимметричной трехслойной пластины характеризуются двумя системами дифференциальных уравнений, совпадающими с системами дифференциальных уравнений, описывающих затухающие колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

Заключение. В продолжении статьи будет приведено обсуждение результатов численных экспериментов выбранных объектов исследования.

Ключевые слова: квазиоднородная пластина, симметричная трехслойная пластина, асимметричная трехслойная пластина, собственная частота, собственная форма, коэффициент механических потерь, относительная толщина.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

DOI: 10.24937/2542-2324-2022-2-400-51-58
UDC 678.067:620.168.3+534.83

B.A. Yartsev¹ , V.M. Ryabov², L.V. Parshina¹ 

¹ Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

² St. Petersburg State University, Russia

DISSIPATIVE PROPERTIES OF THREE-LAYERED COMPOSITE STRUCTURES. 3. OBJECTS OF STUDY

Object and purpose of research. The object of research is a sandwich plate formed by two rigid anisotropic layers and a soft isotropic layer of viscoelastic polymer in the middle. Each rigid layer is an anisotropic structure formed by a finite

Для цитирования: Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В. Диссипативные свойства трехслойных композитных структур. 3. Объекты исследования. Труды Крыловского государственного научного центра. 2022; 2(400): 51–58.

For citations: Yartsev B.A., Ryabov V.M., Parshina L.V. Dissipative properties of three-layered composite structures. 3. Objects of study. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2022; 2(400): 51–58 (in Russian).

number of arbitrary oriented orthotropic viscoelastic layers of composites. The purpose of work is to choose the objects of research demonstrating main features of parameters of natural decaying oscillation of sandwich plates.

Materials and methods. Qualitative analysis of differential equations describing decaying oscillations of anisotropic plates of various compositions and reinforcement structures.

Main results. The main objects of research are two special reinforcement structures of rigid layers made up of unidirectional CFRP layers: symmetric and asymmetric structures. The symmetric reinforcement structure of rigid layers is formed by an assembly of unidirectional CFRP layers with the same orientation relative to the global axes of these layers. In the asymmetric structures the unidirectional CFRP layers are oriented in the opposite directions with respect to the global axes of the rigid layers. Results of numerical modeling of quasi-homogeneous monocline plate dynamic response are given. It is shown that coupled oscillations of the symmetric sandwich plate are described by two systems of differential equations similar to the equation systems that describe decaying oscillations of quasi-homogeneous monocline plate. While the coupled oscillations of the asymmetric sandwich plate are described by two systems of differential equations coinciding with the systems of differential equations describing decaying oscillations of globally orthotropic sandwich plate.

Conclusion. Further to this paper, discussion of numerical experiments on chosen objects of research will be given.

Keywords: quasi-homogeneous plate, symmetric sandwich plate, asymmetric sandwich plate, natural frequency, natural mode, loss factor, relative thickness.

The authors declare no conflicts of interest.

Введение

Introduction

Математическая модель и численный метод решения дифференциальных уравнений затухающих колебаний трехслойных пластин, образованных двумя жесткими моноклинными слоями и мягким средним изотропным слоем из вязкоупругого полимера [1, 2], позволяют определять параметры динамического отклика таких структур – собственные частоты, собственные формы колебаний, коэффициенты механических потерь.

Очевидно, что эти параметры зависят от относительной толщины мягкого слоя вязкоупругого полимера \bar{h} , структуры армирования жестких слоев и температуры окружающей среды T_C . Многообразии структур армирования жестких слоев

трехслойной пластины не оставляет надежд на исследование бесконечного множества их возможных вариантов.

Поэтому далее рассматриваются лишь две специальные структуры армирования жестких слоев, компонуемых из однонаправленных слоев углепластика HMS/DX-209 ($h_{(1)} = h_{(3)} = h = a/100 = 0,0016 \text{ м} = \text{const}$): симметричная и асимметричная. Симметричная структура армирования жестких слоев 1 и 3 образована совокупностью однонаправленных слоев углепластика, ориентированных в направлениях $\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = \theta$ (рис. 1а). В асимметричной структуре однонаправленные слои HMS/DX-209 ориентированы в направлениях $\theta_{(1)} = -\theta_{(3)} = \theta$ (рис. 1б). В качестве материала мягкого слоя используется изотропный вязкоупругий полимер ВДМ-2.

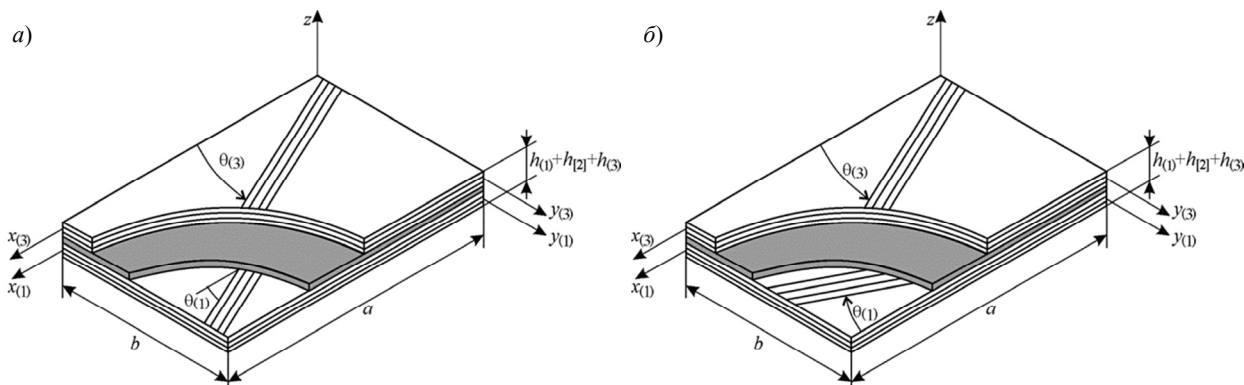


Рис. 1. Схема симметричной (а) и асимметричной (б) трехслойных пластин

Fig. 1. Schematic of symmetric (a) and asymmetric (b) sandwich plates

Квазиоднородная пластина жесткого слоя

Quasi-homogeneous plate of rigid layer

Вначале рассмотрим влияние ориентации армирования на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь квазиоднородной пластины из углепластика HMS/DX-209 ($a = 0,16$ м, $b = a/4 = 0,04$ м, $h = 0,0016$ м). В этом случае $r = 1$, $B_{lm} = 0$; $E = G = \rho_{[2]} = 0$, $I_1 = 0$, и связанная система дифференциальных уравнений колебаний трехслойных пластин [1] распадается на две системы, первая из которых описывает мембранно-сдвиговые колебания квазиоднородной моноклинной пластины:

$$A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{16}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{16}\tilde{u}_{,xy} + A_{26}\tilde{v}_{,yy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 I_0 \tilde{u} = 0, \quad (1)$$

$$A_{16}\tilde{u}_{,xx} + A_{26}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + A_{26}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 I_0 \tilde{v} = 0,$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$A_{16}\tilde{u}_{,x} + A_{26}\tilde{v}_{,y} + A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

$$A_{12}\tilde{u}_{,x} + A_{22}\tilde{v}_{,y} + A_{26}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$A_{11}\tilde{u}_{,x} + A_{12}\tilde{v}_{,y} + A_{16}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

$$A_{16}\tilde{u}_{,x} + A_{26}\tilde{v}_{,y} + A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0.$$

Вторая система дифференциальных уравнений описывает изгибно-крутильные колебания квазиоднородной моноклинной пластины:

$$A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{45}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{45}(\tilde{\beta}_{,x} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \omega^2 I_0 \tilde{w} = 0,$$

$$D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{16}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{16}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{26}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{45}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \omega^2 I_2 \tilde{\alpha} = 0, \quad (2)$$

$$D_{16}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{26}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{26}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - A_{45}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \omega^2 I_2 \tilde{\beta} = 0,$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + A_{45}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) = 0,$$

$$D_{16}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{26}\tilde{\beta}_{,y} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) = 0,$$

$$D_{12}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{22}\tilde{\beta}_{,y} + D_{26}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) = 0,$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$A_{45}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) = 0,$$

$$D_{11}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{12}\tilde{\beta}_{,y} + D_{16}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) = 0,$$

$$D_{16}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{26}\tilde{\beta}_{,y} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) = 0.$$

Если квазиоднородная пластина ортотропна, то $A_{16} = A_{26} = A_{45} = D_{16} = D_{26} = 0$, и система дифференциальных уравнений (1) принимает вид:

$$A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 I_0 \tilde{u} = 0, \quad (3)$$

$$A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + \omega^2 I_0 \tilde{v} = 0,$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

$$A_{12}\tilde{u}_{,x} + A_{22}\tilde{v}_{,y} = 0,$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$A_{11}\tilde{u}_{,x} + A_{12}\tilde{v}_{,y} = 0,$$

$$A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0.$$

Также упрощается и система дифференциальных уравнений (2):

$$A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \omega^2 I_0 \tilde{w} = 0,$$

$$D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) -$$

$$-A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \omega^2 I_2 \tilde{\alpha} = 0, \quad (4)$$

$$D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} -$$

$$-A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + \omega^2 I_2 \tilde{\beta} = 0.$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) = 0,$$

$$D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) = 0,$$

$$D_{12}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{22}\tilde{\beta}_{,y} = 0,$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) = 0,$$

$$D_{11}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{12}\tilde{\beta}_{,y} = 0,$$

$$D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) = 0.$$

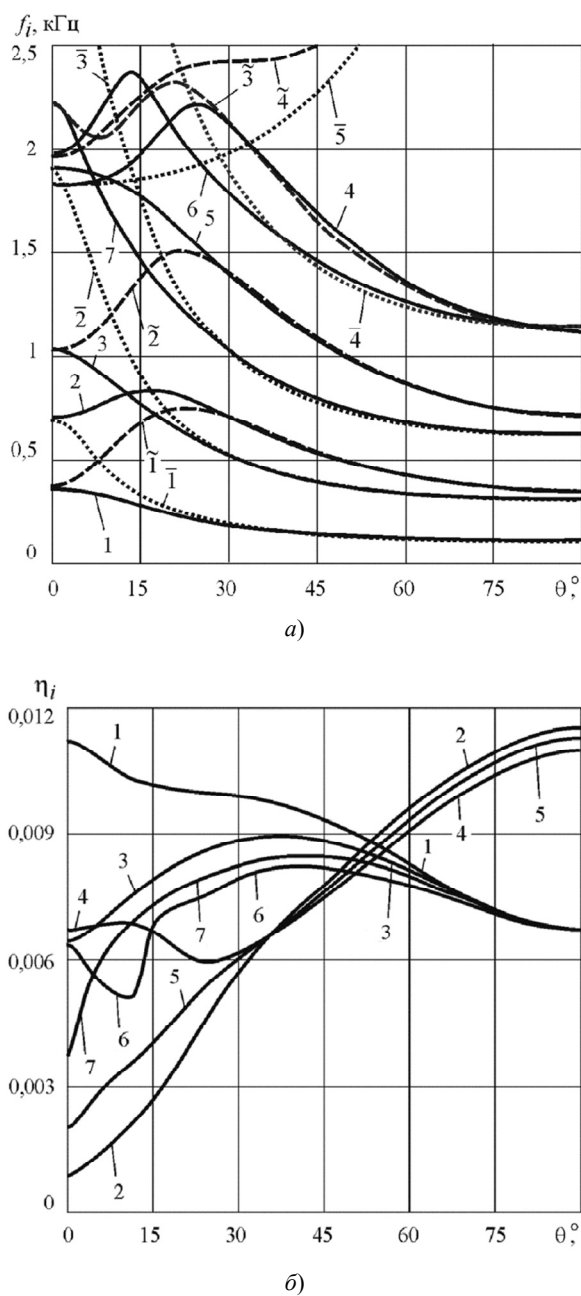


Рис. 2. Зависимости собственных частот (а), коэффициентов механических потерь низших тонов (б) связанных изгибно-крутильных колебаний квазиоднородной пластины от угла ориентации армирования однонаправленного углепластика HMS/DX-209

Fig. 2. Natural frequency of (a) loss factor of lower tones (b) coupled flexural vibrations of quasi-homogeneous plate versus angle of orientation of HMS/DX-209 CFRP reinforcement

Система дифференциальных уравнений (3) описывает мембранные и сдвиговые колебания квазиоднородной ортотропной пластины, в то время как ее изгибные и крутильные колебания характеризует система дифференциальных уравнений (4).

При проведении численных исследований рассматривались семь низших тонов связанных изгибно-крутильных колебаний квазиоднородной пластины из однонаправленного углепластика HMS/DX-209 (рис. 2). Неклассический вид графиков зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ от угла ориентации армирования однонаправленного углепластика $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ($i = \bar{1}, 7$), представленных на рис. 2, свидетельствует о фейерверке эффектов, порождаемых связанностью мод колебаний пластины. Анализ полученных результатов позволил установить, что в зависимости от значения угла θ каждой моде собственных колебаний соответствуют несколько различных собственных форм, порождаемых чередой взаимных трансформаций собственных форм связанных мод колебаний.

Для демонстрации описанных эффектов рассмотрим последовательность взаимных трансформаций первой и второй связанных мод колебаний, графики зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ ($i = 1, 2$) которых приведены на рис. 2 (кривые 1, 2). На рис. 2а также нанесены графики зависимостей парциальных изгибных $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ и крутильных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ собственных частот (кривые $\bar{1}, \tilde{1}$). Величины парциальных собственных частот определялись из решения систем дифференциальных уравнений (3), (4) по т.н. свободным комплексным модулям упругости $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$ и свободным комплексным модулям межслойного сдвига $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$, $G_{yz} = G_{yz}(\theta)$. В то же время свободный комплексный модуль сдвига в плоскости армирования $G_{xy} = G_{xy}(\theta)$ заменялся т.н. чистым комплексным модулем сдвига в плоскости армирования $\bar{G}_{xy}(\theta) = G_{xy}(\theta) / [1 - \mu_{xy,x}(\theta) \cdot \mu_{x,xy}(\theta)]$, соответствующим полному «запрещению» изгибных деформаций при сдвиге пластины в плоскости армирования.

Здесь $\mu_{x,xy}(\theta)$, $\mu_{xy,x}(\theta)$ – коэффициенты взаимного влияния первого и второго рода слоя полимерных композиционных материалов (ПКМ) в локальной системе координат. Понятия «свободных» и «чистых» модулей введены Фойгтом [3]. Изменения собственных форм низших тонов связанных колебаний квазиоднородной пластины из углепластика HMS/DX-209 в зависимости от угла ориентации

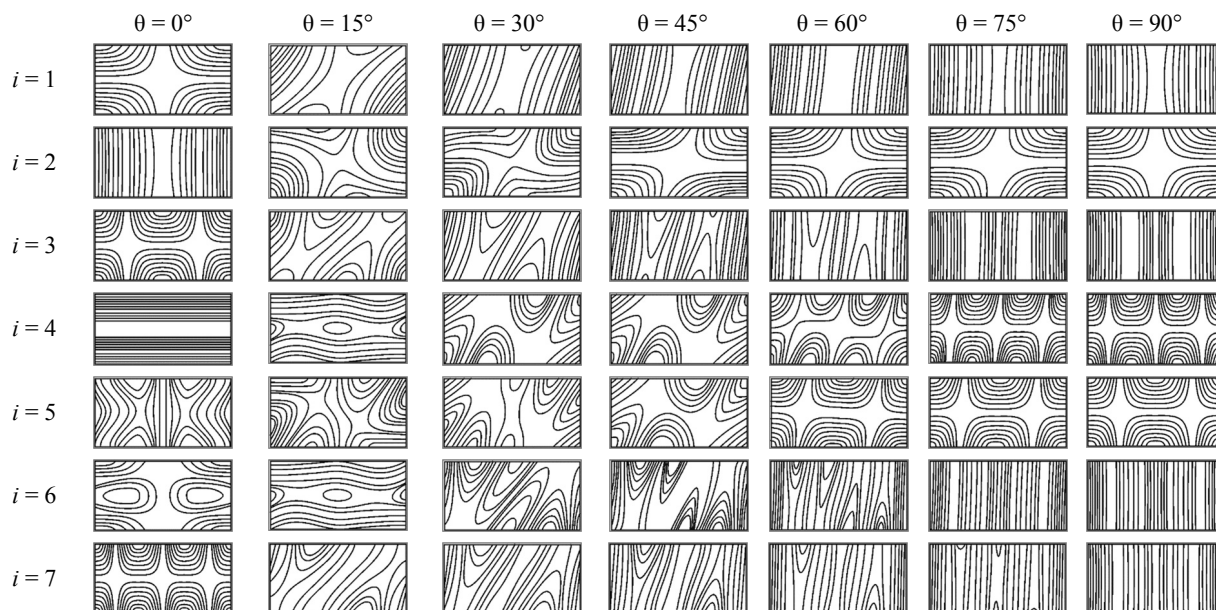


Рис. 3. Зависимость собственных форм связанных мод колебаний квазиоднородной пластины от угла ориентации армирования однонаправленного углепластика HMS/DX-209

Fig. 3. Natural mode shapes of quasi-homogeneous plate coupled oscillations versus angle of orientation of unidirectional CFRP HMS/DX-209

армирования приведены на рис. 3. Не зависящие от ориентации армирования собственные формы парциальных мод колебаний представлены на рис. 4.

Совместный анализ приведенных на рис. 2–4 зависимостей позволяет утверждать, что на отрезке $\theta \in [0^\circ, 30^\circ]$ происходят взаимные трансформации собственных форм первой и второй мод связанных колебаний. Об этом, в частности, свидетельствует появление точки пересечения графиков зависимостей их парциальных изгибных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ и крутильных $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ собственных частот от угла ориентации армирования θ (кривые $\bar{1}$, $\tilde{1}$ на рис. 2a) внутри области, ограниченной функциями $f_1 = f_1(\theta)$ и $f_2 = f_2(\theta)$ связанных мод колебаний (кривые 1, 2 на рис. 2a).

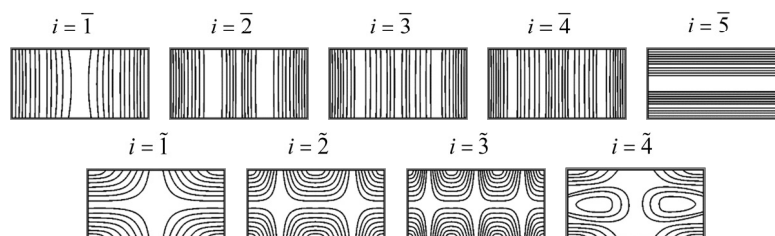
Пересечение графиков функций $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ и $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ в точке $\theta \approx 8^\circ$ свидетельствует, что на примыкающем к ней отрезке с нечеткими граница-

ми по оси θ начинается взаимная трансформация собственных форм первой и второй связанных мод колебаний. Собственная форма первой связанной моды, идентифицируемая при $\theta < 8^\circ$ как первая квазикрутильная, при $\theta > 8^\circ$ трансформируется в первую квазиизгибную собственную форму. Собственная форма второй связанной моды, идентифицируемая при $\theta < 8^\circ$ как первая квазиизгибная, при $\theta > 8^\circ$ трансформируется в первую квазикрутильную собственную форму.

Аналогичная картина наблюдается и для более высоких тонов колебаний. Например, пересечение графиков функций $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\theta)$ и $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\theta)$ в точке $\theta \approx 11^\circ$ (кривые $\bar{2}$, $\tilde{2}$ на рис. 2a) говорит о том, что на примыкающем к ней отрезке изменения θ происходит взаимная трансформация собственных форм третьей и пятой связанных мод колебаний. При $\theta > 11^\circ$ соб-

Рис. 4. Собственные формы парциальных мод колебаний квазиоднородной пластины из однонаправленного углепластика HMS/DX-209

Fig. 4. Natural partial mode shapes of quasi-homogeneous plate made of unidirectional CFRP HMS/DX-209



ственная форма третьей связанной моды трансформируется в собственную форму пятой связанной моды, а собственная форма пятой связанной моды – в собственную форму третьей связанной моды.

В свою очередь, по мере увеличения угла θ функция парциальной изгибной частоты $\tilde{f}_5 = \tilde{f}_5(\theta)$ при $\theta \approx 33^\circ$ пересекается с функцией парциальной крутильной частоты $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_3(\theta)$ (кривые $\bar{5}, \bar{3}$ на рис. 2а), что также подтверждает появление области взаимной трансформации четвертой связанной (при $\theta \in [0^\circ, 33^\circ]$ – первой квазиизгибной относительно оси x) и пятой связанной (при $\theta \in [0^\circ, 33^\circ]$ – третьей квазикрутильной относительно оси x) мод колебаний. Результатом этой трансформации является тождественность собственной формы пятой связанной моды при $\theta = 90^\circ$ собственной форме седьмой связанной моды при $\theta = 0^\circ$. Собственная форма седьмой связанной моды в результате взаимной трансформации с более высокой связанной модой на отрезке с центром в точке $\theta \approx 13^\circ$ (кривые $\bar{7}, \bar{3}$ на рис. 2а) при $\theta = 90^\circ$ вырождается в четвертую изгибную моду колебаний относительно оси x .

Приведенный анализ позволяет заключить, что взаимные трансформации собственных форм связанных мод колебаний безопорной квазизнородной моноклинной прямоугольной пластины возникают в случае, если хотя бы в одном из направлений пластины x или y одна из собственных форм характеризуется четным числом четвертой волны, а другая собственная форма – нечетным числом четвертой волны.

Симметричная трехслойная пластина

Symmetric sandwich plate

Перейдем к рассмотрению двух специальных видов трехслойных пластин – симметричной и асимметричной. Квазизнородные жесткие слои этих пластин имеют одинаковую толщину $h_{(1)} = h_{(3)} = h$, одинаковые инерционные характеристики $\rho_{(1)} = \rho_{(3)} = \rho$, $I_0^{(1)} = I_0^{(3)} = I_0 = \rho h$, $I_1^{(1)} = I_1^{(3)} = I_1 = 0$, $I_2^{(1)} = I_2^{(3)} = I_2 = \rho h^3/12$ и отличаются лишь ориентацией армирования углепластика HMS/DX-209.

В симметричной пластине все слои углепластика ориентированы под углами $\theta_{(1)} = \theta_{(3)} = \theta$ к направлениям глобальных осей $x_{(1)}$ и $x_{(3)}$ жестких слоев 1 и 3 (рис. 1а), а в асимметричной – под углами $\theta_{(1)} = -\theta_{(3)} = \theta$ (рис. 1б) к направлениям тех же осей. В этом случае справедливы равенства:

$$u^{(1)} = u^{(3)} = u, \quad v^{(1)} = v^{(3)} = v, \quad w^{(1)} = w^{(3)} = w, \\ \alpha^{(1)} = \alpha^{(3)} = \alpha, \quad \beta^{(1)} = \beta^{(3)} = \beta.$$

Для симметричной трехслойной пластины элементы матриц мембранных, смешанных и изгибных жесткостей жестких слоев связаны соотношениями: $A_{lm}^{(1)} = A_{lm}^{(3)} = A_{lm}$, $B_{lm}^{(1)} = B_{lm}^{(3)} = 0$, $D_{lm}^{(1)} = D_{lm}^{(3)} = D_{lm}$, подстановка которых в связанную систему дифференциальных уравнений колебаний трехслойных пластин [1] приводит к двум независимым системам дифференциальных уравнений. Первая из этих систем описывает мембранно-сдвиговые колебания глобально моноклинной трехслойной пластины:

$$A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{16}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{16}\tilde{u}_{,xy} + A_{26}\tilde{v}_{,yy} + \\ + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{u} = 0, \quad (5)$$

$$A_{16}\tilde{u}_{,xx} + A_{26}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + \\ + A_{26}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{v} = 0,$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$A_{16}\tilde{u}_{,x} + A_{26}\tilde{v}_{,y} + A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

$$A_{12}\tilde{u}_{,x} + A_{22}\tilde{v}_{,y} + A_{26}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$A_{11}\tilde{u}_{,x} + A_{12}\tilde{v}_{,y} + A_{16}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0,$$

$$A_{16}\tilde{u}_{,x} + A_{26}\tilde{v}_{,y} + A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) = 0.$$

Вторая система дифференциальных уравнений описывает изгибно-крутильные колебания глобально моноклинной трехслойной пластины:

$$A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{45}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{w}_{,xy}) + A_{45}(\tilde{\beta}_{,x} + \tilde{w}_{,xy}) + \\ + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \frac{G}{2} [h_{[2]}(\tilde{w}_{,xx} + \tilde{w}_{,yy}) - h(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{\beta}_{,y})] + \\ + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{w} = 0, \quad (6)$$

$$D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{16}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{16}\tilde{\alpha}_{,xy} + \\ + D_{26}\tilde{\beta}_{,yy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{45}(\tilde{\beta}_{,x} + \tilde{w}_{,y}) - A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,x}) -$$

$$- \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}} \tilde{\alpha} - \tilde{w}_{,x} \right) + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\alpha} = 0,$$

$$D_{16}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{26}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} + \\ + D_{26}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{44}(\tilde{\beta}_{,x} + \tilde{w}_{,y}) - A_{45}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,x}) -$$

$$- \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}} \tilde{\beta} - \tilde{w}_{,y} \right) + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\beta} = 0,$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$\begin{aligned} A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + A_{45}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \frac{G}{2}(h_{[2]}\tilde{w}_{,y} - h\tilde{\beta}) &= 0, \\ D_{16}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{26}\tilde{\beta}_{,y} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) &= 0, \\ D_{12}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{22}\tilde{\beta}_{,y} + D_{26}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) &= 0, \end{aligned}$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$\begin{aligned} A_{45}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \frac{G}{2}(h_{[2]}\tilde{w}_{,x} - h\tilde{\alpha}) &= 0, \\ D_{11}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{12}\tilde{\beta}_{,y} + D_{16}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) &= 0, \\ D_{16}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{26}\tilde{\beta}_{,y} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) &= 0. \end{aligned}$$

Если жесткие слои симметричной трехслойной пластины ортотропны ($A_{16} = A_{26} = A_{45} = D_{16} = D_{26} = 0$), то системы дифференциальных уравнений (5) и (6) упрощаются:

$$\begin{aligned} A_{11}\tilde{u}_{,xx} + A_{12}\tilde{v}_{,xy} + A_{66}(\tilde{u}_{,yy} + \tilde{v}_{,xy}) + \\ + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{u} &= 0, \\ A_{66}(\tilde{u}_{,xy} + \tilde{v}_{,xx}) + A_{12}\tilde{u}_{,xy} + A_{22}\tilde{v}_{,yy} + \\ + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{v} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$\begin{aligned} A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) &= 0, \\ A_{12}\tilde{u}_{,x} + A_{22}\tilde{v}_{,y} &= 0, \end{aligned}$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$\begin{aligned} A_{11}\tilde{u}_{,x} + A_{12}\tilde{v}_{,y} &= 0, \\ A_{66}(\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{44}(\tilde{\beta}_{,y} + \tilde{w}_{,yy}) + A_{55}(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{w}_{,xx}) + \frac{G}{2}[h_{[2]}(\tilde{w}_{,xx} + \tilde{w}_{,yy}) - \\ - h(\tilde{\alpha}_{,x} + \tilde{\beta}_{,y})] + \omega^2 \left(I_0 + \frac{\rho_{[2]}h_{[2]}}{2} \right) \tilde{w} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11}\tilde{\alpha}_{,xx} + D_{12}\tilde{\beta}_{,xy} + D_{66}(\tilde{\alpha}_{,yy} + \tilde{\beta}_{,xy}) - A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) - \\ - \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}} \tilde{\alpha} - \tilde{w}_{,x} \right) + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_{66}(\tilde{\alpha}_{,xy} + \tilde{\beta}_{,xx}) + D_{12}\tilde{\alpha}_{,xy} + D_{22}\tilde{\beta}_{,yy} - A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) - \\ - \frac{Gh}{2} \left(\frac{h}{h_{[2]}} \tilde{\beta} - \tilde{w}_{,y} \right) + \omega^2 \left(I_2 + \frac{\rho_{[2]}h^2h_{[2]}}{24} \right) \tilde{\beta} &= 0, \end{aligned}$$

при $x \in [0, a]$, $y = 0, b$:

$$\begin{aligned} A_{44}(\tilde{\beta} + \tilde{w}_{,y}) + \frac{G}{2}(h_{[2]}\tilde{w}_{,y} - h\tilde{\beta}) &= 0, \\ D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) &= 0, \\ D_{12}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{22}\tilde{\beta}_{,y} &= 0, \end{aligned}$$

при $y \in [0, b]$, $x = 0, a$:

$$\begin{aligned} A_{55}(\tilde{\alpha} + \tilde{w}_{,x}) + \frac{G}{2}(h_{[2]}\tilde{w}_{,x} - h\tilde{\alpha}) &= 0, \\ D_{11}\tilde{\alpha}_{,x} + D_{12}\tilde{\beta}_{,y} &= 0, \\ D_{66}(\tilde{\alpha}_{,y} + \tilde{\beta}_{,x}) &= 0. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (7) описывает мембранные и сдвиговые колебания глобально ортотропной трехслойной пластины, а система дифференциальных уравнений (8) – изгибные и крутильные колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

Асимметричная трехслойная пластина

Asymmetric sandwich plate

Для асимметричной трехслойной пластины элементы матриц мембранных, смешанных и изгибных жесткостей жестких слоев связаны соотношениями: $A_{11}^{(1)} = A_{11}^{(3)} = A_{11}$, $A_{12}^{(1)} = A_{12}^{(3)} = A_{12}$, $A_{16}^{(1)} = -A_{16}^{(3)} = A_{16}$, $A_{22}^{(1)} = A_{22}^{(3)} = A_{22}$, $A_{26}^{(1)} = -A_{26}^{(3)} = A_{26}$, $A_{66}^{(1)} = A_{66}^{(3)} = A_{66}$, $A_{44}^{(1)} = A_{44}^{(3)} = A_{44}$, $A_{45}^{(1)} = -A_{45}^{(3)} = A_{45}$, $A_{55}^{(1)} = A_{55}^{(3)} = A_{55}$, $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(3)} = D_{11}$, $D_{12}^{(1)} = D_{12}^{(3)} = D_{12}$, $D_{16}^{(1)} = -D_{16}^{(3)} = D_{16}$, $D_{22}^{(1)} = D_{22}^{(3)} = D_{22}$, $D_{26}^{(1)} = -D_{26}^{(3)} = D_{26}$, $D_{66}^{(1)} = D_{66}^{(3)} = D_{66}$.

Подстановка этих соотношений в связанную систему дифференциальных уравнений колебаний трехслойных пластин [1] приводит к ее разделению на две независимые системы. Первая из них, описывающая мембранные и сдвиговые колебания асимметричной трехслойной пластины, совпадает с системой дифференциальных уравнений (7), описывающей мембранные и сдвиговые колебания глобально ортотропной трехслойной пластины. Вторая система, описывающая изгибные и крутильные колебания асимметричной трехслойной пластины, совпадает с системой дифференциальных уравнений (8), описывающей изгибные и крутильные колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

Заключение

Conclusion

Таким образом, связанные затухающие колебания симметричной трехслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений (5), (6), структуры которых близки структурам систем соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих затухающие колебания квазидвухродной моноклинной пластины, – (1), (2).

В то же время связанные затухающие колебания асимметричной трехслойной пластины описываются двумя системами дифференциальных уравнений (7), (8), совпадающими с системами соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих затухающие колебания глобально ортотропной трехслойной пластины.

Список использованной литературы

1. Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В. Диссипативные свойства трехслойных композитных структур. 1. Постановка задачи // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2021. Вып. 4(398). С. 24–34. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-4-398-24-34.
2. Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В. Диссипативные свойства трехслойных композитных структур. 2. Метод решения // Труды Крыловского гос. науч. центра. 2022. Вып. 1(399). С. 55–64. DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-399-55-64.
3. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig ; Berlin : Teubner, 1928. XXVI, 978 s.

References

1. Yartsev B.A., Ryabov V.M., Parshina L.V. Dissipative properties of sandwich composite structures. 1. Problem formulation // Transactions of the Krylov State Research Centre 2021. Vol. 4(398). P. 24–34. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-4-398-24-34 (in Russian).
2. Yartsev B.A., Ryabov V.M., Parshina L.V. Dissipative properties of sandwich composite structures. 2. Method

of solution // Transactions of the Krylov State Research Centre. Vol. 1(399). P. 55–64. DOI: 10.24937/2542-2324-2022-1-399-55-64 (in Russian).

3. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig ; Berlin : Teubner, 1928. XXVI, 978 s.

Сведения об авторах

Ярцев Борис Александрович, д.т.н., начальник сектора ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7443-1039>.

Рябов Виктор Михайлович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой «Вычислительная математика» Санкт-Петербургского государственного университета. Адрес: 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9. Тел.: +7 (812) 543-83-37. E-mail: v.ryabov@spbu.ru.

Паршина Людмила Валентиновна, к.т.н., старший научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@ksrc.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8424-0903>.

About the authors

Boris A. Yartsev, Dr. Sci. (Eng.), Head of Sector, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@krylov.spb.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7443-1039>.

Viktor M. Ryabov, Dr. Sci. (Phys.&Math.), Head of Computational Mathematics Department, St. Petersburg State University. Address: 7–9, Universitetskaya Embankment, St. Petersburg, Russia, post code 199034. Tel.: +7 (812) 543-83-37. E-mail: v.ryabov@spbu.ru.

Ljudmila V. Parshina, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-47-06. E-mail: krylov@ksrc.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8424-0903>.

Поступила / Received: 08.09.21

Принята в печать / Accepted: 28.04.22

© Ярцев Б.А., Рябов В.М., Паршина Л.В., 2022