


УДК 621.3.011.32
EDN: MJORDD

Г.Н. Цицикян , М.Ю. Антипов
ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

ВЗАИМНАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДОВ И СОПОСТАВЛЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ ОЦЕНОК

Объект и цель научной работы. Объектом исследования является сопоставление взаимной индуктивности концентрических соленоидов при симметричном расположении.

Материалы и методы. Применены методы теоретической электротехники.

Основные результаты. Установлена близость численных оценок по расчетным выражениям, созданным в разное время.

Заключение. Рассмотрены расчетные выражения для определения коэффициентов взаимной индуктивности концентрических соленоидов на основе предшествующих публикаций и получен ряд численных результатов, свидетельствующих об их непротиворечивости.

Ключевые слова: концентрические соленоиды, взаимные индуктивности, численные оценки.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

UDC 621.3.011.32
EDN: MJORDD

G.N. Tsitsikyan , M.Yu. Antipov
Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

MUTUAL INDUCTANCE OF CONCENTRIC SOLENOIDS AND COMPARISON OF NUMERICAL ESTIMATES

Object and purpose of research. The object of research is comparison of mutual inductance of concentric solenoids with symmetrical arrangement.

Materials and methods. Methods of electrical engineering theory are employed.

Main results. Similarity of numerical estimates based on relationships developed at different time is identified.

Conclusion. Relations for coefficients of mutual inductance of concentric solenoids are considered based on previous publications and a number of numerical results are obtained, which confirm their consistency.

Keywords: concentric solenoids, mutual inductance, numerical estimates.

The authors declare no conflicts of interest.

Во многих литературных источниках, включая [1–7] из приведенного списка, вопросу взаимной индуктивности концентрических соленоидов, и прежде всего при симметричном расположении, уделено значительное место. Вместе с тем известные способы оценки и расчетные выражения для взаимной индуктивности весьма неоднозначны, и в некото-

рых случаях значительно отличаются друг от друга. Это вызывает необходимость в их численном сопоставлении с последующим сравнением результатов.

Одной из ранних работ, посвященных определению взаимной индуктивности концентрических соленоидов при симметричном взаимном расположении, является [2].

Для цитирования: Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Взаимная индуктивность концентрических соленоидов и сопоставление численных оценок. Труды Крыловского государственного научного центра. 2023; 4(406): 96–100.

For citations: Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu. Mutual inductance of concentric solenoids and comparison of numerical estimates. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2023; 4(406): 96–100 (in Russian).

В справочной книге [3] оценка коэффициентов взаимной индуктивности концентрических соленоидов осуществляется по выражениям (7–9) и (7–10) с последующим использованием таблиц 7.1 и 7.2, а определение индуктивности соленоида и концентрической с ним катушки – по выражениям (7–37), (7–38) и (7–39) или приближенно в виде полусуммы взаимных индуктивностей данного соленоида и двух других так, как это записано в [3].

В работе [4] записано выражение для взаимной индуктивности в соответствии с [2] в системе СИ, которое в обозначениях рис. 1 может быть представлено при условии, что $s_2 = s_1 = s$, в виде:

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 w W}{2(s^2 + R_1^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{R_1^2 R_2^2}{8(s^2 + R_1^2)^2} \left(3 - 4 \frac{s^2}{R_2^2} \right) + \frac{1}{32} \frac{R_1^4 R_2^4}{(s^2 + R_1^2)^4} \left(3 - 4 \frac{s^2}{R_1^2} \right) \left(2,5 - 10 \frac{s^2}{R_2^2} + 4 \frac{s^4}{R_2^4} \right) + \dots \right]. \quad (1)$$

Выражение (1) является частным случаем выражения (9), записанного в [4] со ссылкой на работу [2], если на рис. 1 ввести замену обозначений $2s_1 = A$, $2s_2 = a$. Тогда для взаимной индуктивности правомерно выражение (9) из [4]:

$$M = \frac{\mu_0 \pi d^2}{4} W w (A^2 + D^2)^{-1/2} \left[1 + \frac{D^2 d^2}{8(A^2 + D^2)^2} \left(3 - 4 \frac{a^2}{d^2} \right) + \frac{1}{32} \frac{D^4 d^4}{(A^2 + D^2)^4} \left(3 - 4 \frac{A^2}{D^2} \right) \left(\frac{5}{2} - 10 \frac{a^2}{d^2} + 4 \frac{a^4}{d^4} \right) + \dots \right] \quad (2)$$

И при $D = 2R_1$, $d = 2R_2$, $a = A = 2s$ записанное выражение переходит в (1).

Для конкретного сопоставления примем $s = R_1$. Тогда (1) можно переписать в виде:

$$M \Big|_{s=R_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 w W}{2\sqrt{2} R_1} \left[1 + \frac{1}{32} \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(3 - 4 \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) + \frac{1}{32} \frac{R_2^4}{2^4 R_1^4} (-1) \left(2,5 - 10 \frac{R_1^2}{R_2^2} + 4 \frac{R_1^4}{R_2^4} \right) + \dots \right]. \quad (1a)$$

Для оценочных результатов в выражении (1a) выберем отношения R_2/R_1 равными 0,5; 0,65 и 0,8. Тогда получаем соответственно:

$$M \Big|_{s=R_1, R_2/R_1=0,5} = \mu_0 w W R_2 0,4971,$$

$$M \Big|_{s=R_1, R_2/R_1=0,65} = \mu_0 w W R_2 0,6602,$$

$$M \Big|_{s=R_1, R_2/R_1=0,8} = \mu_0 w W R_2 0,8332.$$

Следует отметить, что для конфигурации концентрических соленоидов, изображенных на рис. 4 в [5], можно записать выражение для взаимной индуктивности в виде формулы (14) со ссылкой на работу [6]. Указанное выражение с наложением условий и обозначений $l_1 = l_2 = 2s$, $R_1 = D/2$, $R_2 = d/2$ приобретает вид:

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 w W}{2(R_1^2 + s^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{R_1^2 R_2^2}{8(s^2 + R_1^2)^2} \left(3 - \frac{(2s)^2}{R_2^2} \right) \right]. \quad (3)$$

Выражение (3) совпадает с первыми двумя членами выражения (1) и является преобразованной формой выражения, данного в [6] в виде (15), если $2s$ заменить на l , а $2R_1$ и $2R_2$ – соответственно на d_1 и d_2 . В этом случае формула (3) сводится к формуле (15) в [5]:

$$M = \frac{\mu_0 \pi (d_2/2)^2 w W}{(d_1^2 + l^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{d_1^2 d_2^2}{8(d_1^2 + l^2)^2} \left(3 - \frac{4l^2}{d_2^2} \right) \right]. \quad (4)$$

При $l = d_1$ выражение (4) сводится к виду (17) в [5]:

$$M = \frac{\mu_0 \pi d_2^2 w W}{d_1 4\sqrt{2}} \left[1 + \frac{1}{32} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \left(3 - 4 \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) \right]. \quad (5)$$

Если теперь в формуле (4) положить $l = 0$, $w = W = 1,0$, то получим следующее выражение для $M \Big|_{l=0}$:

$$M \Big|_{l=0} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

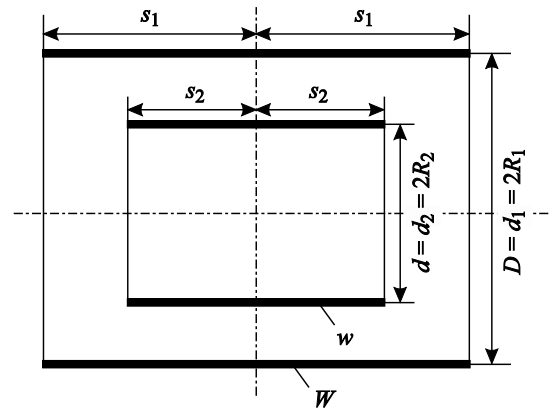


Рис. 1. Концентрические соленоиды с симметричным расположением длиной $2s_1$ и $2s_2$ с числом витков W и w внешнего и внутреннего соленоидов с диаметром $D = d_1 = 2R_1$, $d = d_2 = 2R_2$

Fig. 1. Symmetrically arranged $2s_1$ and $2s_2$ -long concentric solenoids with W and w turns of external and internal solenoids, diameters $D = d_1 = 2R_1$, $d = d_2 = 2R_2$

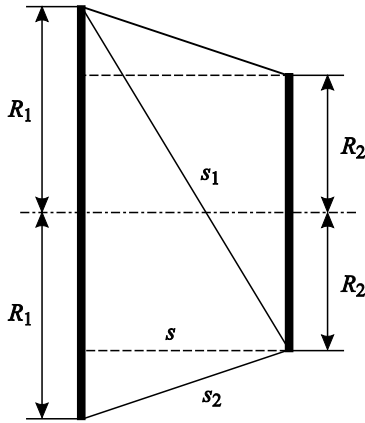


Рис. 2. Симметрично расположенные витки в параллельных плоскостях

Fig. 2. Symmetrically arranged turns in parallel planes

По первым двум членам оно согласуется с выражением (5–22) в [3] для концентрических контуров радиусов R_1 и R_2 , расположенных в одной плоскости, а именно:

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 \delta R_2 \left[1 + \frac{3}{8} \delta^2 + \frac{15}{64} \delta^4 + \frac{175}{1024} \delta^6 + \dots \right], \quad (6a)$$

где $\delta = \frac{R_2}{R_1}$ и $\delta < 1,0$.

Выражение (6a) является частным случаем выражения для коэффициентов взаимной индукции двух соосных контуров, расположенных в параллельных плоскостях, и записанного в [7] в виде:

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 (R_1 R_2)^{1/2} m^{3/2} \times \left[1 + \frac{3}{8} m^2 + \frac{15}{64} m^4 + \frac{175}{1024} m^6 + \dots \right], \quad (6б)$$

когда $m = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$, $k^2 = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + x^2}$ и $x = 0$.

Следует также отметить, что в [7] на первой странице в знаменателе для m вместо $1 + \sqrt{1 + k^2}$ должно быть записано $1 + \sqrt{1 - k^2}$, а k^2 следует исправить на записанное здесь выражение.

Вместе с тем строгое выражение для взаимной индуктивности параллельных витков с радиусами R_1 и R_2 , расположенных симметрично относительно

друг друга в параллельных плоскостях, известно и приведено в работе [8] в виде (рис. 2):

$$M = \mu_0 2 \sqrt{R_1 R_2} \frac{1}{\sqrt{k_1}} [K(k_1) - E(k_1)], \quad (6в)$$

где $k_1 = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}$, $s_1 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + s^2}$,

$s_2 = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + s^2}$, K и E – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Соответственно, при $s = 0$ (рис. 2) выражение (6в) трансформируется к виду: ($k_1 = R_2/R_1$)

$$M = \mu_0 2R_1 \left[K\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - E\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]. \quad (6г)$$

Теперь можно сопоставить численные результаты по выражениям (6) и (6г), сохраняя один и тот же размерный множитель $\mu_0 R_2$. Это означает, что численные результаты сопоставляются в соответствии с выражениями:

$$\frac{\pi R_2}{2 R_1} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \right] \text{ и } 2 \frac{R_1}{R_2} \left[K\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - E\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right].$$

Пусть теперь $R_2/R_1 = 0,5$, тогда имеем 0,859 и на основании таблицы (приложение 4 [3]) 0,873, а при $R_2/R_1 = 0,3$ – соответственно 0,487 и 0,488, т.е. практически одинаковые численные результаты.

Следует подчеркнуть, что для коаксиальных соленоидов с симметричным расположением, когда один из соленоидов располагается внутри другого с торцами, равноудаленными от торцов внешнего соленоида (рис. 1) при совмещении торцов и условии, что $a = A = 2s$ (рис. 1) выражение для взаимной индуктивности в значительной мере упрощается. И в соответствии с (8) и (9) в [9], с учетом равенства $s_1 = s_2 = s$, может быть записано в виде:

$$M \Big|_{s_1=s_2=s} \cong \frac{\pi \mu_0 w W R_2^2}{4s^2 / R_1} \times \left[\left(\left(\frac{2s}{R_1} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{8} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left(\left(\frac{2s}{R_1} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2} - \frac{1}{64} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \left(1 - 4 \left(\frac{2s}{R_1} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{2s}{R_1} \right)^2 - 1 \right)^{-7/2} - \dots - 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 + \dots \right]. \quad (7)$$

Таблица. Сопоставление численных результатов по выражениям для M в соответствии с (1а) и (7) при $s = R_1$

Table. Comparison of numerical results as per relation for M in accordance with (1a) and (7) for $s = R_1$

R_2/R_1	0,8	0,65	0,5
Формула (1а)	0,8332	0,6602	0,4971
Формула (7) при $s = R_1$	0,8224	0,6542	0,4972

Теперь целесообразно сравнить численные результаты по выражениям для M в соответствии с (1а) и (7) при $s = R_1$ и результаты сопоставления с размерным множителем $\mu_0 w W R_2$ свести в таблицу.

Как видно, таблица подтверждает хорошую сходимость численных результатов. Из этого следует, что выражения (1а) и (7) вполне сопоставимы и могут быть использованы для получения численных оценок при изменении отношения радиусов R_2/R_1 от 0,8 до 0,5 и в более широких пределах. Отметим, что выражение для взаимной индуктивности соосной катушки и соленоида с совмещенными торцами приводится в [10].

В [10] в соответствии с рис. 3 записано выражение (5), которое приводим с ограничением по первым двум членам ряда:

$$M = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{w W (R'_1)^3 R_2}{(R_1 - R'_1) 4s^2} \left\{ \frac{4}{3} \left[\left(\frac{R_1}{R'_1} \right)^3 - 1 \right] \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2s}{R_2} \right)^2} - 1 \right] + \frac{1}{10} \left(\frac{R'_1}{R_2} \right) \left[\left(\frac{R_1}{R'_1} \right)^5 - 1 \right] \frac{\left[1 + \left(\frac{2s}{R_2} \right)^2 \right]^{3/2} - 1}{\left[1 + \left(\frac{2s}{R_2} \right)^2 \right]^{3/2}} \dots \right\} \quad (8)$$

Вопрос о правомерности формулы (8) обсуждается в [10].

Выводы

Conclusion

Рассмотрены расчетные выражения для определения коэффициентов взаимной индуктивности концентрических соленоидов на основе предшествующих публикаций и получен ряд численных результатов, свидетельствующих об их непротиворечивости.

Список использованной литературы

1. *Grover F.W.* Inductance calculations. Working formulas and tables. New York : Van Nostrand, 1946. 286 p.

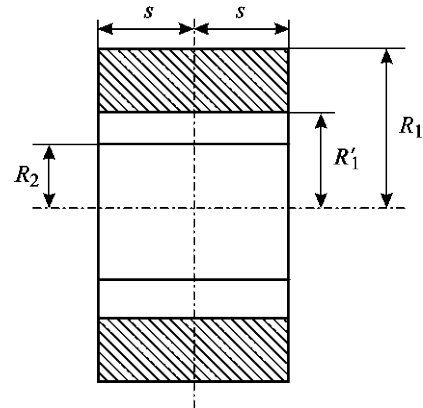


Рис. 3. Соосные катушки и соленоиды с общими торцевыми плоскостями

Fig. 3. Co-axial coils and solenoids with common end faces

2. *Dwight H.B., Grover F.W.* Some series formulas for mutual inductance of solenoids // *Electrical engineering*. 1937. March. P. 347–354.
3. *Калантаров П.А., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей : справочная книга. 3-е изд., перераб. и доп. Ленинград : Энергоатомиздат, 1986. 487, [1] с.
4. *Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю.* Коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции коаксиальных круговых контуров и соленоидов // *Известия Рос. Академии наук. Энергетика*. 2019. № 5. С. 80–87. DOI: 10.1134/S0002331019050157.
5. *Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю.* Сопоставительный анализ выражений по расчету индуктивностей катушек с симметрией вращения // *Известия Российской академии наук. Энергетика*. 2019. № 4. С. 58–66. DOI: 10.1134/S0002331019040150.
6. *Miki A., Hosoya T., Okuyama K.* A calculation method for impulse voltage distribution and transferred voltage in transformer winding // *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*. 1978. Vol. 97, No. 3. P. 930–939. DOI: 10.1109/TPAS.1978.354566.
7. *Цицикян Г.Н.* О коэффициентах взаимной индукции и силах взаимодействия круговых коаксиальных контуров // *Электричество*. 2019. № 6. С. 59–65. DOI: 10.24160/0013-5380-2019-6-59-65.

8. *Knight D.W.* Solenoid inductance calculation : Vers. 0.20 // G3YNH.info : [pers. site]. Devon, 2016. URL: https://g3ynh.info/zdocs/magnetics/part_1.html (Accessed: 20.09.2023).
9. *Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю.* Взаимная индуктивность коаксиальных соленоидов и сопоставительный анализ // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2022. № 2. С. 44–50. DOI: 10.31857/S0002331022020066.
10. *Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю., Рифаат Ахмед.* Определение взаимных индуктивностей и электродинамических сил между катушкой и соосным соленоидом при симметричном расположении // Труды Крыловского государственного научного центра. 2021. Вып. 2(396). С. 99–104. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-2-396-99-104.
8. *Knight D.W.* Solenoid inductance calculation : Vers. 0.20 // G3YNH.info : [pers. site]. Devon, 2016. URL: https://g3ynh.info/zdocs/magnetics/part_1.html (accessed: 20.09.2023).
9. *Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.* Mutual inductance of coaxial solenoids and comparative analysis // Proceedings of Russian Academy of Sciences. Power Engineering. 2022. № 2. P. 44–50. DOI: 10.31857/S0002331022020066 (in Russian).
10. *Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu., Rifaat Ahmed.* Determination of mutual inductances and electrodynamic forces between the coil and the coaxial solenoid in a symmetrical arrangement // Transactions of Krylov State Research Centre. 2021. Vol. 2(396). P. 99–104. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-2-396-99-104 (in Russian).

References

1. *Grover F.W.* Inductance calculations. Working formulas and tables. New York : Van Nostrand, 1946. 286 p.
2. *Dwight H.B., Grover F.W.* Some series formulas for mutual inductance of solenoids // Electrical engineering. 1937. March. P. 347–354.
3. *Kalantarov P., Tseitlin L.* Calculation of inductances. Reference book. 3rd ed., rev. and enl. Leningrad : Energoatomizdat, 1986. 487 p. (in Russian).
4. *G. Tsitsikyan, M. Antipov.* Mutual induction and selfinduction coefficients in coaxial close-loop circuits and solenoids // Izvestiya of Russian Academy of Sciences. Power Engineering. 2019. No. 5. P. 80–87. DOI: 10.1134/S0002331019050157 (in Russian).
5. *Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.* Comparative analysis of inductance calculation expressions for coils with rotation symmetry // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering. 2019. No. 4. P. 58–66. DOI: 10.1134/S0002331019040150 (in Russian).
6. *Miki A., Hosoya T., Okuyama K.* A calculation method for impulse voltage distribution and transferred voltage in transformer winding // IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems. 1978. Vol. 97, No. 3. P. 930–939. DOI: 10.1109/TPAS.1978.354566.
7. *Tsitsikyan G.* On reciprocal induction coefficients and interaction forces of circular coaxial circuits // Elektrichestvo (Electricity). 2019. No. 6. P. 59–65. DOI: 10.24160/0013-5380-2019-6-59-65 (in Russian).

Сведения об авторах

Цицикян Георгий Николаевич, д.т.н., профессор, начальник сектора – заместитель начальника отдела филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 6. Тел.: +7 (812) 748-52-39. E-mail: George.20021940@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8813-6003>.

Антипов Михаил Юрьевич, ведущий инженер филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196128, Россия, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 6. Тел.: +7 (812) 369-94-91. E-mail: set@sp.ru.

About the authors

Georgy N. Tsitsikyan, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Head of Sector – Deputy Head of Department, TSNII SET branch of Krylov State Research Centre. Address: 6, Blagodatnaya st. St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: +7 (812) 748-52-39. E-mail: George.20021940@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-8813-6003>.

Mikhail Yu. Antipov, Lead Engineer, TSNII SET branch of Krylov State Research Centre. Address: 6, Blagodatnaya st., St. Petersburg, Russia, post code 196128. Tel.: +7 (812) 369-94-91. E-mail: set@sp.ru.

Поступила / Received: 14.08.23
Принята в печать / Accepted: 06.12.23
© Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю., 2023