

УДК 537.612+537.621.5  
EDN: TKJVFU

А.Я. Лаповок, Н.Л. Судов  
ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

## МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ПРОВОДЯЩЕГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ТЕЛА

**Объект и цель научной работы.** Вычисление дипольного магнитного момента металлического тела, вращающегося в постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно оси вращения.

**Материалы и методы.** Численные методы расчета магнитного поля вихревых токов и намагниченности.

**Основные результаты.** В статье предложен метод расчета дипольного магнитного момента тела, вращающегося в постоянном магнитном поле, на основе вычисления магнитного момента покоящегося тела, помещенного в переменное магнитное поле. Для тестирования метода использовано прямое решение исходной задачи методом конечных элементов во временной области.

**Заключение.** Полученные результаты позволяют оценить постоянную и переменную составляющую дипольного магнитного момента, возникающего при вращении проводящего тела с произвольной геометрией в постоянном магнитном поле.

**Ключевые слова:** магнитный момент, магнитное поле, численные методы расчета, метод конечных элементов.

*Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

UDC 537.612+537.621.5  
EDN: TKJVFU

A.Ya. Lapovok, N.L. Sudov  
Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

## MAGNETIC MOMENT OF A CONDUCTING BODY ROTATING IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

**Object and purpose of research.** Calculation of the magnetic dipole moment induced in the metallic body rotating in a constant magnetic field directed perpendicular to the rotation axis.

**Materials and methods.** Numerical methods of computation of magnetic fields caused by eddy currents and magnetization.

**Main results.** The paper proposes a magnetic dipole moment calculation method for a body rotating in a constant magnetic field. The method is based on the computation of the magnetic moment of the body in rest placed in the alternating magnetic field. For method testing we use a direct finite-element solution of the initial problem in the time-domain.

**Conclusion.** The obtained results allow estimating the stationary and alternating components of the magnetic dipole moment arising when a conducting body of arbitrary geometry rotates in a constant magnetic field.

**Keywords:** magnetic moment, magnetic field, numerical calculation methods, finite-element method.

*The authors declare no conflicts of interest.*

### Введение

#### Introduction

Точное аналитическое решение задачи о вихревых токах в проводящем теле, вращающемся в постоянном поперечном магнитном поле, получено для бес-

конечного кругового цилиндра [1]. В [1] упоминается возможность решения задачи во вращающейся системе координат, в которой тело неподвижно, а вращается внешнее магнитное поле. Мы используем данную возможность для численного расчета поперечного магнитного дипольного момента произвольного тела.

*Для цитирования:* Лаповок А.Я., Судов Н.Л. Магнитный момент проводящего вращающегося в поперечном магнитном поле тела. Труды Крыловского государственного научного центра. 2024; 1(407): 88–92.

*For citations:* Lapovok A.Ya., Sudov N.L. Magnetic moment of a conducting body rotating in a transverse magnetic field. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2024; 1(407): 88–92 (in Russian).

В первом разделе статьи приведена физико-математическая формулировка задачи расчета момента и выведена формула, связывающая постоянный и переменный момент вращающегося тела с моментами неподвижного тела в двух синусоидально изменяющихся во времени взаимно ортогональных магнитных полях.

Второй раздел посвящен валидации метода расчета моментов на основе сравнения моментов, найденных с помощью выведенной формулы, с моментами, полученными непосредственным моделированием магнитного поля вращающегося тела методом конечных элементов во временной области.

В третьем разделе разработанный метод применен для расчета магнитного момента вихревых токов, возникающих при вращении гребного винта корабля в магнитном поле Земли. Показано, что переменный момент, являющийся источником низкочастотного электромагнитного поля корабля, возникает только в случае двухлопастного винта.

## Формулировка задачи

### Problem formulation

Рассмотрим металлическое тело с электропроводимостью  $\sigma$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ , вращающееся с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2\pi f$  вокруг продольной оси  $z$  в поперечном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_y$  (рис. 1).

В начальный момент времени  $t = 0$  вращающаяся система координат  $x', y'$ , связанная с телом, повернута на угол  $\varphi$  относительно неподвижной системы координат  $x, y$ , связанной с наблюдателем. Требуется найти составляющие  $M_y, M_x$  поперечного дипольного магнитного момента тела в неподвижной системе координат. Эффекты, связанные с вращением постоянной намагниченности и изменением продольной индуктивной намагниченности при вращении тела, не учитываются.

Обозначим  $\alpha = \omega t + \varphi$ .

Используя  $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{y'} \cos \alpha + \mathbf{e}_{x'} \sin \alpha$ , получим

$$\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_y = H_0 (\mathbf{e}_{y'} \cos \alpha + \mathbf{e}_{x'} \sin \alpha). \quad (1)$$

Пусть известны:

$M_{yy} \mathbf{e}_{y'} + M_{xy} \mathbf{e}_{x'}$  – комплексная амплитуда магнитного момента неподвижного тела в переменном поле  $H_0 \mathbf{e}_{y'} e^{i\omega t}$ ,

$M_{xx} \mathbf{e}_{x'} + M_{yx} \mathbf{e}_{y'}$  – амплитуда магнитного момента тела в поле  $H_0 \mathbf{e}_{x'} e^{i\omega t}$ .

Можно убедиться, что  $M_{yx} = M_{xy}$ .

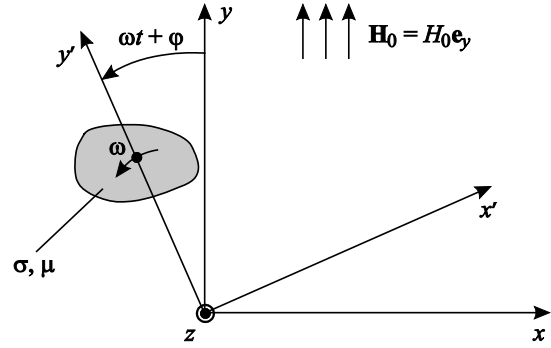


Рис. 1. Вращение тела в поперечном магнитном поле

Fig. 1. Rotation of a body in a transverse magnetic field

С учетом (1) определим момент тела во вращающейся системе координат  $x', y'$ :

$$\mathbf{M}' = M_{y'} \mathbf{e}_{y'} + M_{x'} \mathbf{e}_{x'},$$

где

$$\begin{aligned} M_{y'} &= \operatorname{Re}(M_{yy}) \cos \alpha - \operatorname{Im}(M_{yy}) \sin \alpha + \\ &+ \operatorname{Re}(M_{xy}) \sin \alpha + \operatorname{Im}(M_{xy}) \cos \alpha, \\ M_{x'} &= \operatorname{Re}(M_{xx}) \sin \alpha + \operatorname{Im}(M_{xx}) \cos \alpha + \\ &+ \operatorname{Re}(M_{xy}) \cos \alpha - \operatorname{Im}(M_{xy}) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

В неподвижной системе координат

$$\mathbf{M} = M_y \mathbf{e}_y + M_x \mathbf{e}_x,$$

где

$$\begin{aligned} M_y &= M_{y'} \cos \alpha + M_{x'} \sin \alpha, \\ M_x &= M_{x'} \cos \alpha - M_{y'} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3) и производя элементарные преобразования, окончательно получим

$$M_y + iM_x = \frac{M_{yy} + M_{xx}}{2} + |C| e^{-i(2\omega t + 2\varphi + \psi)}, \quad (4)$$

где

$$C = \frac{M_{yy} - M_{xx}}{2} - iM_{xy}, \quad \psi = \arg C.$$

Из формулы (4) следует:

1. При вращении проводящего тела в поперечном магнитном поле  $H_0 \mathbf{e}_y$  неподвижный наблюдатель регистрирует постоянный во времени дипольный магнитный момент с составляющими  $M_y^{(0)} = 0,5 \operatorname{Re}(M_{yy} + M_{xx})$ ,  $M_x^{(0)} = 0,5 \operatorname{Im}(M_{yy} + M_{xx})$ , где  $M_{yy}$  и  $M_{xx}$  – комплексные амплитуды ди-

- полных моментов неподвижного тела в двух ортогональных переменных полях с временной зависимостью  $H_0 e^{i\omega t}$ .
- Переменный дипольный магнитный момент вращающегося тела наблюдается только на второй гармонике частоты вращения. Составляющие момента  $M_y^{(2)}$ ,  $M_x^{(2)}$  имеют одинаковую амплитуду  $|C|$  и выражаются как ортогональные проекции постоянного магнитного момента величиной  $|C|$ , вращающегося с угловой скоростью  $2\omega$  противоположно направлению вращения тела. Переменные составляющие момента равны нулю, если одновременно выполняются два условия: а) тело имеет симметрию поворота на  $90^\circ$  ( $M_{yy} = M_{xx}$ ); б) отсутствует перекрестный магнитный момент тела в ортогональных полях ( $M_{xy} = 0$ ).
  - Величины постоянного и переменного дипольного магнитного момента вращающегося тела не зависят от положения центра вращения.

## Численные результаты

### Numerical results

Для проверки формулы (4) рассмотрены двумерные (2D) задачи о вращении цилиндрических тел с поперечным сечением круг, квадрат, равнобедренный треугольник и прямоугольник в магнитном поле  $H_0 = 1$  А/м. Материал тел – сталь с электропроводимостью  $\sigma = 5E6$  См/м и относительной магнитной проницаемостью  $\mu/\mu_0 = 200$ .

2D-моделирование магнитного поля вращающихся тел выполнено в конечно-элементном пакете Comsol Multiphysics [2]. Решение произведено во временной области (шагами по времени) с включением внешнего магнитного поля в момент времени  $t = 0$ . Переходный процесс установления магнитных моментов тела иллюстрируется на рис. 2 (см. вклейку).

Линии потока магнитной индукции и распределение вихревых токов в установившемся режиме после затухания переходного процесса ( $t = 5$  с) приведены на рис. 3 (см. вклейку). Для кругового цилиндра на вставке (левый верхний график, слева вверху) показаны линии потока в точном решении.

Для определения дипольных магнитных моментов  $M_{yy}$ ,  $M_{xx}$ ,  $M_{xy}$  неподвижных тел в ортогональных магнитных полях, синусоидально изменяющихся во времени с угловой частотой  $\omega$ , применен 2D-метод интегральных уравнений (МИУ) с импедансными граничными условиями [3].

В табл. 1 (см. вклейку) постоянные и переменные магнитные моменты, полученные в Comsol, сравниваются с моментами, рассчитанными с помощью МИУ и формулы (4). Практическое совпадение моментов, найденных разными методами, подтверждает правильность формулы (4).

## Магнитный момент гребного винта, вращающегося в магнитном поле Земли

### Magnetic moment of marine propeller rotating in the Earth magnetic field

В качестве одного из источников низкочастотного электромагнитного поля корабля (НЭМПК) рассматриваются вихревые токи, индуцируемые в лопастях гребного винта при его вращении в магнитном поле Земли [4]. В [4] приведена приближенная формула для расчета переменного дипольного магнитного момента лопасти как момента вихревых токов эквивалентного диска радиуса  $R$ . Нормаль к поверхности эквивалентного диска лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Магнитный момент диска определен без учета поперечного скин-эффекта – неравномерного распределения вихревого тока по толщине диска. Магнитное поле винта с  $N$  лопастями рассчитывается как суммарное поле  $N$  точечных магнитных диполей, размещенных по окружности на расстоянии  $R$  от оси вращения.

Применяя формулу (4) по отдельности для каждой лопасти с номером  $n$ , расположенной под углом

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}n, \text{ получим суммарный переменный момент}$$

$N$  лопастей:

$$\begin{aligned} M_y^{(2)} + iM_x^{(2)} &= \sum_{n=1}^N |C| e^{-i(2\omega t + \frac{2\pi}{N}n + \psi)} = \\ &= |C| e^{-i(2\omega t + \psi)} \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{4\pi}{N}n}. \end{aligned} \quad (5)$$

В правой части (5) стоит сумма членов геометрической прогрессии  $S = \sum_{n=1}^N e^{-i\frac{4\pi}{N}n}$  с знаменателем  $q = e^{-i\frac{4\pi}{N}}$ . Производя суммирование, получим

$$S = e^{-i\frac{4\pi}{N}} \frac{1 - q^N}{1 - q} = e^{-i\frac{4\pi}{N}} \frac{1 - e^{-4\pi i}}{1 - e^{-i\frac{4\pi}{N}}} = 0,$$

за исключением случая  $N = 2$ , когда  $q = 1$ . Таким образом, рассматриваемый источник НЭМПК ак-

туален только для двухлопастных винтов, редко применяемых в судостроении.

В качестве примера на рис. 4 (см. вклейку) показаны распределения вихревых токов для трехлопастного гребного винта, полученные в программе STAR3D High Frequency [5]. Винт находится в вертикальном переменном поле частотой 5 Гц. Материал винта немагнитный ( $\mu = \mu_0$ ) с электропроводимостью  $\sigma = 4E7$  См/м. Хорошо видно, что вихревые токи в основном индуцируются на замкнутой поверхности ступицы и в корневой части лопастей. На кромках лопасти распределение токов неравномерно, но в целом похоже на распределение токов по окружности в модели эквивалентного диска.

При амплитуде вертикального поля 50 А/м (магнитное поле Земли на широте Санкт-Петербурга) комплексная амплитуда вертикальной составляющей момента для модели на рис. 4а равна  $(-26,97 - i \cdot 2,79)$  А·м<sup>2</sup>. Для модели на рис. 4б, повернутой на 90°, амплитуда момента равна  $(-26,95 - i \cdot 2,80)$  А·м<sup>2</sup>. Таким образом, гребной винт имеет симметрию поворота на 90° по отношению к магнитному моменту. Амплитуда перекрестной составляющей момента равна  $(-0,014 - i \cdot 0,004)$  А·м<sup>2</sup>, практически нулю. В результате, в соответствии с формулой (4), суммарный переменный дипольный магнитный момент винта при его вращении в поперечном магнитном поле равен нулю.

## Заключение

### Conclusion

Полученные результаты позволяют оценить постоянную и переменную составляющие дипольного магнитного момента, возникающего при вращении проводящего тела с произвольной геометрией в постоянном магнитном поле.

## Список использованной литературы

1. *Perry M.P., Jones T.B.* Eddy current induction in a solid conducting cylinder with a transverse magnetic field // IEEE Transactions on Magnetics. 1978. Vol. 14, № 4. P. 227–232. DOI: 10.1109/TMAG.1978.1059755.
2. AC/DC Module : User's Guide : vers. 6.1. [S.I.]: Comsol, 2022. 474 p.
3. *Леонтович М.А.* О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности. Москва ; Ленинград : АН СССР, 1948. Сб. 2 :

Исследования по распространению радиоволн. С. 5–12.

4. *Кочанов Э.С.* Электромагнитное поле корабля, обусловленное индукционными токами при вращении винта в магнитном поле Земли // Труды ЦНИИ им. А.Н. Крылова. Вып. 194. Ленинград : Судпромгиз, 1962. С. 3–21.
5. Программа расчета электромагнитного поля STAR3D High Frequency : свидетельство о гос. регистрации 2011617902 Рос. Федерация / *Р.Я. Низкий* № 2011616007; заявл. 09.08.2011; опублик. 20.08.2014. 1 с.
6. РД 5.0317-80. Винты гребные фиксированного шага морских судов. Правила математического представления поверхности лопастей. Ленинград, [1980].

## References

1. *Perry M.P., Jones T.B.* Eddy current induction in a solid conducting cylinder with a transverse magnetic field // IEEE Transactions on Magnetics. 1978. Vol. 14, № 4. P. 227–232. DOI: 10.1109/TMAG.1978.1059755.
2. AC/DC Module : User's Guide : vers. 6.1. [S.I.]: Comsol, 2022. 474 p.
3. *Leontovitch M.* On approximate boundary conditions for electromagnetic field on surface of good conductive bodies // Noveishiye issledovaniya rasprostraneniya radiovoln vdol zemnoy poverhnosti (Latest research in radio wave propagation along terrestrial surface). Moscow ; Leningrad : Academy of Sciences of the USSR, 1948. Compendium No. 2. Research on radio wave propagation. P. 5–12 (in Russian).
4. *Kochanov E.* Electromagnetic field of ship due to induction currents caused by propeller rotation in terrestrial magnetic field // Transactions of Krylov State Research Centre, Vol. No. 194. Leningrad : Sudpromgiz, 1962. P. 3–21 (in Russian).
5. STAR3D High Frequency software for electromagnetic field calculation. Russian State Registration Certificate No. 2011617902 / *R. Nizky*, No. 2011616007, appl. date, 09.08.2011; publ. date 20.08.2014. 1 p. (in Russian).
6. Regulatory Document RD 5.0317-80. Fixed-pitch propellers for sea-going ships. Rules for mathematical representation of blade surface. Leningrad, 1980 (in Russian).

---

## Сведения об авторах

*Лаповок Андрей Яковлевич*, к.т.н., начальник сектора ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-65-33. E-mail: alapovok@gmail.com.

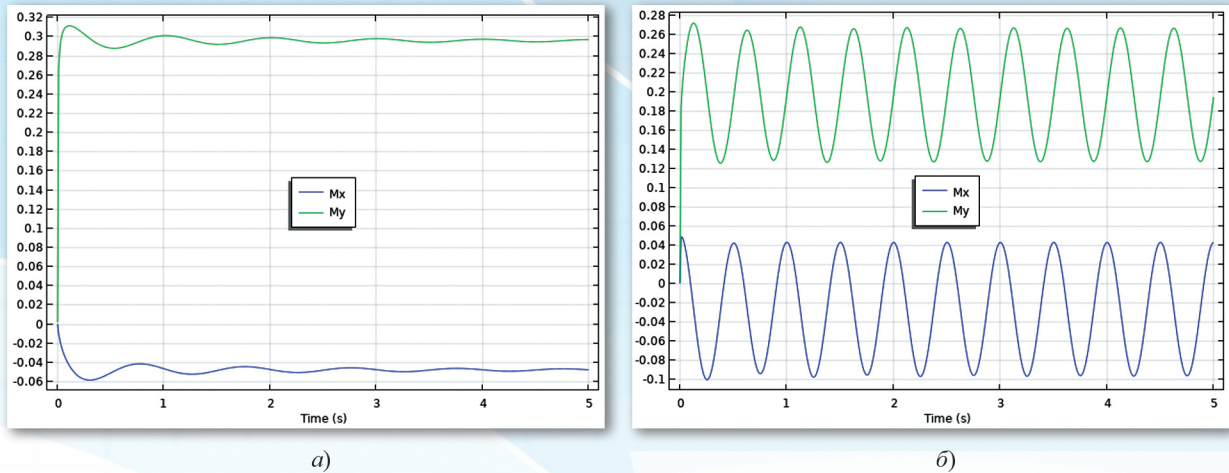
*Судов Николай Леонидович*, к.т.н., начальник сектора ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. E-mail: sudov\_spb@mail.ru.

#### **About the authors**

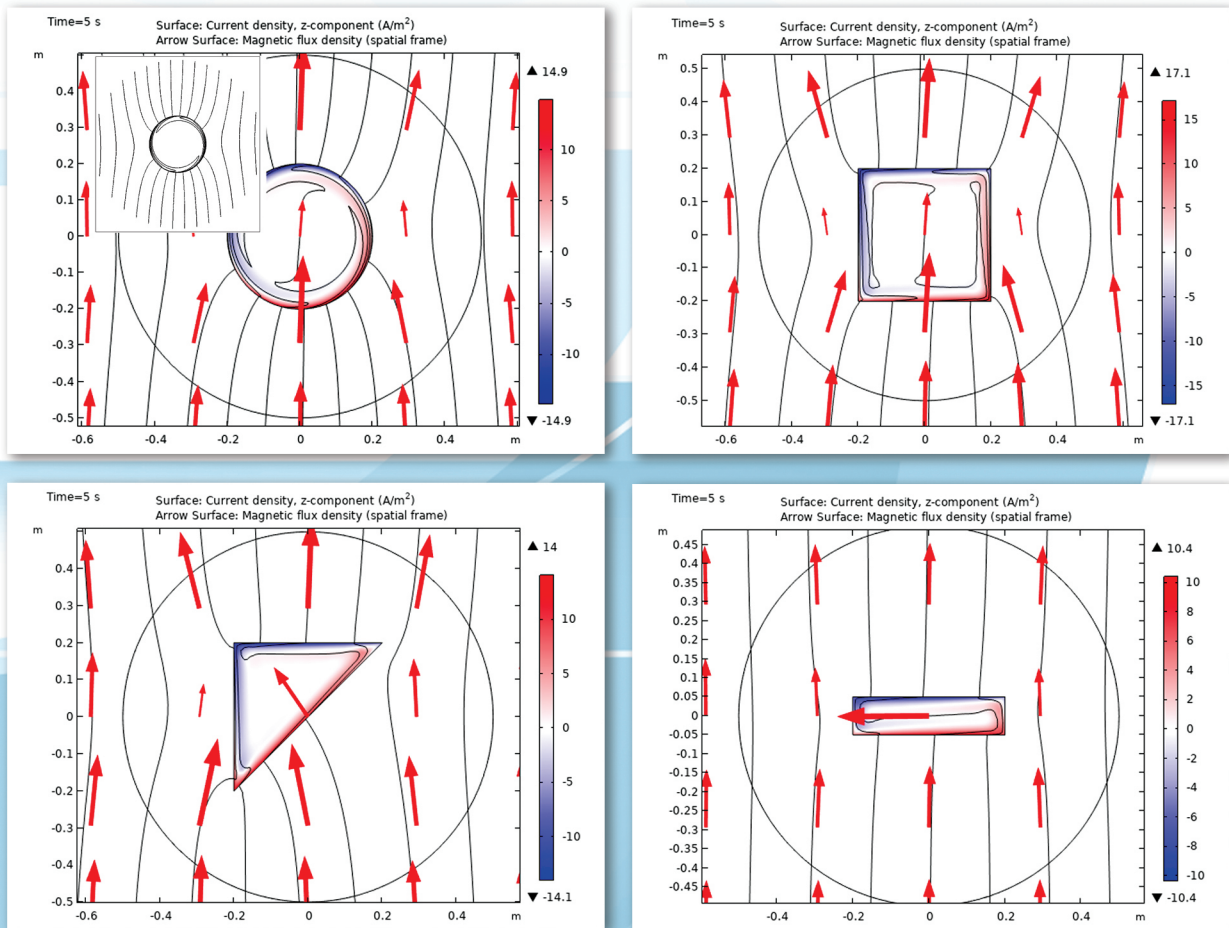
*Andrei Ya. Lapovok*, Cand. Sci. (Eng.), Head of Sector, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoe sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-65-33. E-mail: alapovok@gmail.com.

*Nikolai L. Sudov*, Cand. Sci. (Eng.), Head of Sector, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoe sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. E-mail: sudov\_spb@mail.ru.

Поступила / Received: 22.11.23  
Принята в печать / Accepted: 01.03.24  
© Лаповок А.Я., Судов Н.Л., 2024



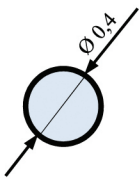
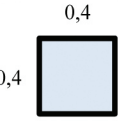
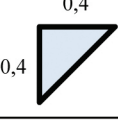

**Рис. 2.** Временная зависимость составляющих  $M_x$  и  $M_y$  дипольного магнитного момента (А·м) в Comsol (частота вращения  $f = 1$  Гц): а) вращение квадратного цилиндра; б) вращение треугольного цилиндра  
**Fig. 2.** Time dependence of  $M_x$  and  $M_y$  components of dipole magnetic moment (A·m) in Comsol (frequency of rotation  $f$  is 1 Hz): а) rotation of the square cylinder; б) rotation of the triangular cylinder

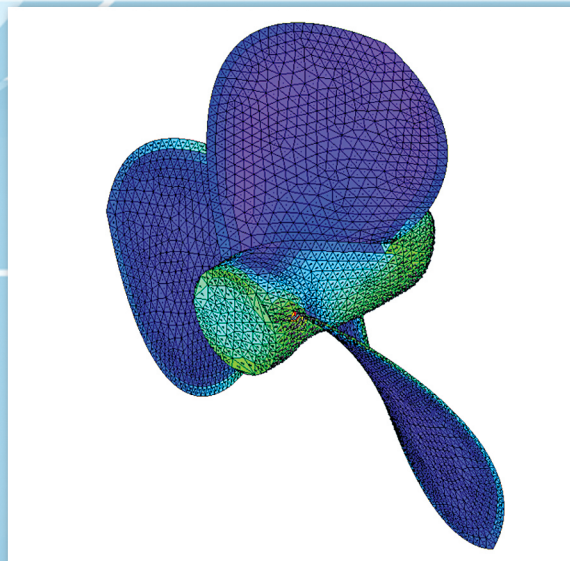
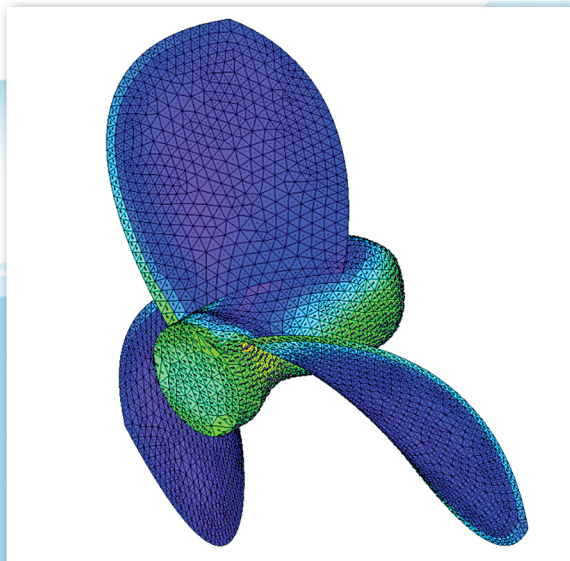


**Рис. 3.** Линии потока магнитной индукции и пространственное распределение вихревых токов при вращении стальных цилиндров в вертикальном магнитном поле. Частота вращения  $f = 1$  Гц. Шкала плотности тока в  $A/m^2$  приведена в правой части каждой картинки  
**Fig. 3.** Magnetic flux density lines and spatial distribution of eddy currents with rotation of steel cylinders in the vertical magnetic field. Frequency of rotation  $f$  is 1 Hz. A scale of the current density in  $A/m^2$  is at the right of each picture

**Таблица 1.** Постоянные и переменные магнитные моменты (А·м) стальных цилиндров

**Table 1.** Stationary and alternating magnetic moments of steel cylinders

Поперечное сечение, м	Метод решения	Частота вращения $f$ , Гц					
		1			5		
		Стационарные моменты		Амплитуда переменных моментов	Стационарные моменты		Амплитуда переменных моментов
$M_y^{(0)}$	$M_x^{(0)}$	$ C $	$M_y^{(0)}$	$M_x^{(0)}$	$ C $		
	МИУ	0,220	-0,028	0	0,183	-0,053	0
	Comsol Stationary	0,220	-0,028	0	0,183	-0,054	0
	Точное решение	0,221	-0,028	0	0,184	-0,054	0
	МИУ	0,295	-0,048	0	0,231	-0,088	0
	Comsol Time Dependent	0,296	-0,047	0	0,232	-0,088	0
	МИУ	0,198	-0,027	0,073	0,162	-0,051	0,069
	Comsol Time Dependent	0,197	-0,027	0,070	0,162	-0,050	0,065
	МИУ	0,114	-0,011	0,068	0,099	-0,022	0,064
	Comsol Time Dependent	0,114	-0,011	0,067	0,099	-0,022	0,062



**Рис. 4.** Вихревые токи, индуцируемые на поверхности гребного винта вертикальным переменным магнитным полем на частоте 5 Гц. Диаметр винта 2,8 м, радиус ступицы 0,25 м, геометрическая модель построена в соответствии с [6]

**Fig. 4.** Eddy currents induced on the propeller surface by the vertical alternating magnetic field at the frequency of 5 Hz. The propeller diameter is 2,8 m, the propeller hub radius is 0,25 m, the geometry is built in the correspondence with [6]