

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ КОРАБЛЯ

DOI: 10.24937/2542-2324-2020-1-391-175-179
УДК 532.52

В.Ю. Кирпичников, А.А. Петров
ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ В ВЯЗКОМ НЕСЖИМАЕМОМ СЛОЕ С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ И ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦАМИ

Объект и цель научной работы. В работе рассматривается динамика вязкого несжимаемого слоя, ограниченного с одной стороны изгибно колеблющейся пластиной, а с другой – неподвижной стенкой.

Материалы и методы. Исследование проводится на основании решения линеаризованного уравнения Навье – Стокса, описывающего динамику вязкой несжимаемой жидкости.

Основные результаты. Вычислены удельное механическое сопротивление слоя колеблющейся пластине и коэффициент потерь в пластине, вызванных движением вязкого слоя.

Заключение. Показано, что механическое сопротивление увеличивается с уменьшением волнового размера толщины слоя, причем реактивная часть сопротивления растет обратно пропорционально kH , а активная часть – обратно пропорционально кубу kH . С увеличением толщины слоя решение асимптотически сходится к известному, полученному для случая полубесконечного слоя.

Ключевые слова: пластина, вязкая жидкость, коэффициент потерь.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

SHIP SIGNATURES

DOI: 10.24937/2542-2324-2020-1-391-175-179
UDC 532.52

V. Kirpichnikov, A. Petrov
Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

ON ENERGY LOSSES IN VISCOUS INCOMPRESSIBLE LAYER WITH FLUCTUATING AND STIFF BOUNDARIES

Object and purpose of research. This paper discusses dynamics of viscous incompressible layer with a bending plate as one boundary and a fixed wall as the other boundary.

Materials and methods. The study is based on linearized Navier-Stokes equation describing the dynamics of viscous incompressible fluid.

Main results. Calculation of specific mechanic resistance for a layer of vibrating plate and loss coefficient of the plate due to the motion of viscous layer.

Conclusion. The study shows that mechanical resistance is inversely proportional to layer thickness (expressed in wavelengths), the reactive part being inversely proportional to the first power of kH and the active part being inversely proportional to the third power of kH . As thickness grows, the solution is asymptotically reduced to the common case of semi-infinite layer.

Keywords: plate, viscous fluid, loss coefficient.

Authors declare lack of the possible conflicts of interests.

Для цитирования: Кирпичников В.Ю., Петров А.А. О потерях энергии в вязком несжимаемом слое с колеблющейся и жесткой границами. Труды Крыловского государственного научного центра. 2020; 1(391): 175–179.

For citations: Kirpichnikov V., Petrov A. On energy losses in viscous incompressible layer with fluctuating and stiff boundaries. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2020; 1(391): 175–179 (in Russian).

Повышение потерь колебательной энергии в инженерных конструкциях является одним из основных направлений уменьшения вибрации и звукоизлучения [1]. Оно достигается, в частности, установкой на изгибно колеблющиеся пластинчатые элементы конструкции более тонких, чем они, накладных листов. Улучшение акустических характеристик конструкций объясняется сухим трением контактирующих участков поверхностей и вязкими потерями при перекачке воздуха в зазорах между указанными поверхностями.

Целью настоящей работы является исследование потерь колебательной энергии в вязком несжимаемом слое с одной колеблющейся (тонкий накладной лист) и другой жесткой (более толстая демпфируемая конструкция) границами.

Рассмотрим колебательное движение вязкой несжимаемой среды, заполняющей слой $H \geq y \geq 0$. Будем считать, что слой ограничен плоской поверхностью $y = 0$, по которой в положительном направлении оси x распространяется незатухающая волна поперечных деформаций со смещением в форме $\xi(x, t) = \xi_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, и жесткой стенкой, расположенной в плоскости $y = H$ (ξ_0 – амплитудное значение; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число деформаций, например изгибных колебаний тонкой пластины, ограничивающей слой; ω – круговая частота; x и t – пространственная и временная координаты).

Для нахождения тангенциальной u и нормальной v к колеблющейся поверхности компонент скорости среды с плотностью ρ и коэффициентом кинематической вязкости ν используем линейные уравнения движения вязкой несжимаемой среды (уравнения Навье – Стокса в предположении малости колебательных скоростей среды)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \quad (1)$$

а также уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия, отражающие непрерывность колебательной скорости на поверхности $y = 0$, в том числе невозможность скольжения частиц среды вдоль этой поверхности, и отсутствие движения среды на жесткой стенке, запишем в форме

$$u = 0, \quad v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{при } y = 0; \quad (3)$$

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = H.$$

Исключая из уравнений (1) давление p , имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \nu \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial y} - \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \right). \quad (4)$$

Компоненты колебательной скорости u и v выразим через функцию тока

$$\Psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp[i(kx - \omega t)],$$

удовлетворяющую уравнению неразрывности (2):

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \varphi'(y) \exp[i(kx - \omega t)]; \quad (5)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\varphi(y) \exp[i(kx - \omega t)].$$

Подставив эти значения в уравнение (4) и, исключив экспоненциальный множитель $\exp[i(kx - \omega t)]$, получим следующее уравнение для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi^{IV}(y) + \left(\frac{i\omega}{\nu} - 2k^2 \right) \varphi''(y) + \left(k^4 - \frac{i\omega k^2}{\nu} \right) \varphi(y) = 0.$$

Его решение запишем в виде

$$\varphi(y) = A_1 \exp(ky) + A_2 \exp(-ky) + A_3 \exp\left(ky \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}}\right) + A_4 \exp\left(-ky \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}}\right), \quad (6)$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина слоя (глубина проникновения), в котором при отсутствии жесткой стенки вязкость полупространства несжимаемой среды оказывает наибольшее влияние на амплитуду и фазу тангенциальной составляющей скорости [2].

С использованием (6), (5) и (1) получим

$$u = \left[A_1 k \exp(ky) - A_2 k \exp(-ky) + A_3 k \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}} \exp\left(ky \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}}\right) - A_4 k \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}} \exp\left(-ky \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}}\right) \right] \times \exp[i(kx - \omega t)]; \quad (7)$$

$$v = -ik \left[A_1 \exp(ky) + A_2 \exp(-ky) + A_3 \exp\left(ky \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}}\right) + A_4 \exp\left(-ky \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}}\right) \right] \times \exp[i(kx - \omega t)];$$

$$p = \rho \omega \left[A_1 \exp(ky) + A_2 \exp(-ky) \right] \exp[i(kx - \omega t)].$$

Выражение удельного механического сопротивления среды Z колебаниям пластины, необходимое для оценки потерь колебательной энергии в слое, может быть записано в виде

$$Z = \frac{p}{v} \Big|_{y=0} = \frac{i\omega\rho}{k} \cdot \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}. \quad (8)$$

Коэффициенты A_1 – A_4 находим с использованием (7) и граничных условий (3).

Обозначая

$$\alpha_j = \frac{A_j}{\xi_0 \omega / k}, \quad j = 1 \dots 4, \quad b = \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 \delta^2}},$$

получим систему

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 b - \alpha_4 b = 0; \quad (9)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1; \quad (10)$$

$$\alpha_1 e^{kH} - \alpha_2 e^{-kH} + \alpha_3 b e^{bkH} - \alpha_4 b e^{-bkH} = 0; \quad (11)$$

$$\alpha_1 e^{kH} + \alpha_2 e^{-kH} + \alpha_3 e^{bkH} + \alpha_4 e^{-bkH} = 0. \quad (12)$$

Подставив в (8) коэффициенты A_j , выраженные с использованием решений системы (9)–(12), и проведя алгебраические преобразования, получим

$$Z = \frac{i\omega\rho}{k} \times \frac{bshkH \cdot chbkH - b^2 chkH \cdot shbkH}{(b^2 + 1)shkH \cdot shbkH - 2bchkh \cdot chbkH + 2b}. \quad (13)$$

Численные величины действительной и мнимой частей безразмерного удельного механического сопротивления $\zeta = \frac{Z}{\omega\rho/k}$ среды колеба-

ниям пластины приведены на рис. 1. Расчеты выполнены для случаев распространения изгибной волны по металлической пластине толщиной $h = 10^{-3}$ м, граничащей, соответственно,

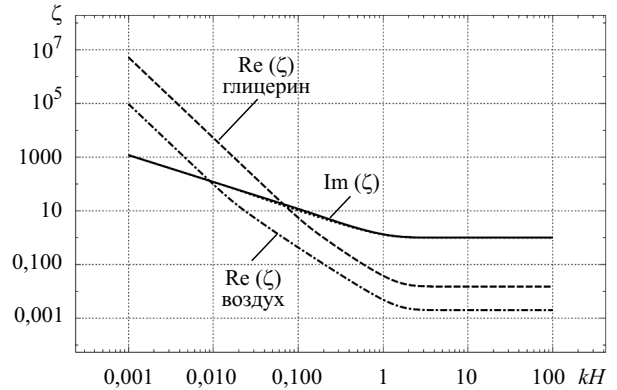


Рис. 1. Действительная и мнимая части безразмерного удельного механического сопротивления ζ колебаниям пластины слоя глицерина и воздуха

Fig. 1. Real and imaginary parts of non-dimensional specific mechanical resistance ζ of a plate vibrating between glycerine and air

с воздухом ($\nu = 1,4 \cdot 10^{-5}$ м²/с) и, одной поверхностью, с глицерином ($\nu = 7 \cdot 10^{-4}$ м²/с). С учетом зависимости длины изгибной волны λ_n от толщины металлической пластины и частоты, $\lambda_n = k / (2\pi) = 10^2 \sqrt{h} / \sqrt{f}$ (h – в м, f – в Гц), безразмерная величина $kb = k\sqrt{2\nu/\omega}$ принималась равной 0,004 (воздух) и 0,0296 (глицерин).

Как видно из рисунка, мнимая часть безразмерного сопротивления колебаниям пластины со стороны как глицерина, так и воздуха описывается практически одной и той же кривой. Значения вещественной части сопротивления ζ слоя глицерина существенно больше соответствующих значений сопротивления слоя воздуха. При этом в обоих случаях величина $|\zeta|$ при увеличении волновой толщины kH слоя среды принимает практически постоянное значение, что свидетельствует об отсутствии влияния возрастающей части толщины слоя на происходящие в нем процессы.

При $kH \rightarrow \infty$ выражение (13) может быть преобразовано к виду

$$\lim_{kH \rightarrow \infty} Z = \frac{i\omega\rho}{k} \lim_{kH \rightarrow \infty} \frac{b}{thbkH - bthkH}. \quad (14)$$

В случае изгибных колебаний металлических пластин толщиной h не более 10^{-2} м на границе большинства существующих газов и жидкостей, кинематическая вязкость которых находится в пределах от 10^{-6} до 10^{-3} м²/с, безразмерная величина

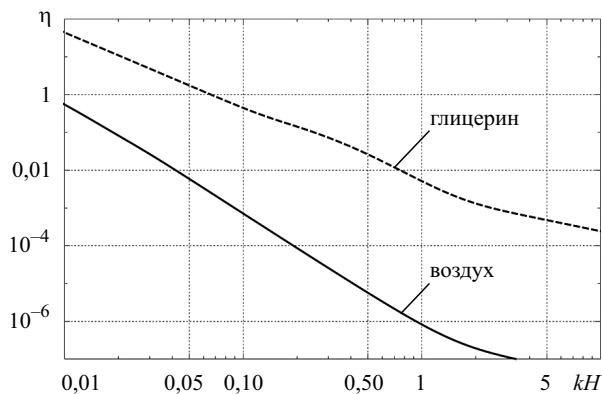


Рис. 2. Коэффициент потерь пластины на границе слоя глицерина и воздуха
Fig. 2. Loss coefficient of the plate at glycerine-air boundary

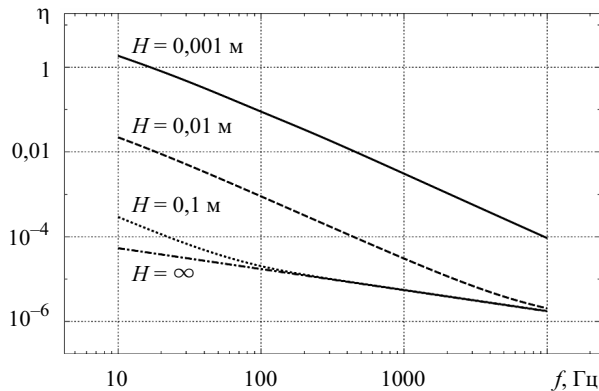


Рис. 3. Коэффициент потерь пластины, граничащей со слоем воздуха
Fig. 3. Loss coefficient of the plate at the air border

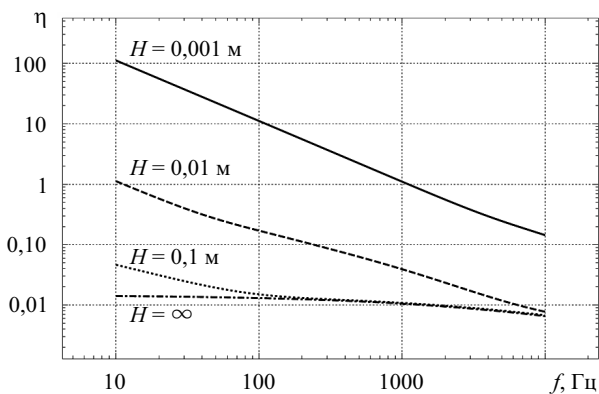


Рис. 4. Коэффициент потерь пластины, граничащей со слоем глицерина
Fig. 4. Loss coefficient of the plate at the glycerine border

$k\delta \ll 1$, а выражение параметра b может быть записано в виде

$$b = \sqrt{1 - \frac{2i}{k^2 b^2}} \approx \frac{1-i}{k\delta}. \quad (15)$$

С использованием (15) имеем

$$\lim_{kH \rightarrow \infty} Z = \frac{i\omega\rho}{k} \cdot \frac{1-i}{i-1+k\delta} \approx \frac{\omega\rho}{k} \left[\frac{k\delta}{2} - i \left(1 + \frac{k\delta}{2} \right) \right]. \quad (16)$$

Полученное выражение совпадает с известным [3, 4] решением уравнений (1), (2) при поперечной деформации поверхности полупространства вязкой несжимаемой среды. Учитывая $k\delta \ll 1$, делаем вывод, что величина Z при больших толщинах слоя определяется преимущественно мнимой частью, имеющей физический смысл присоединенной массы среды, колеблющейся вместе с границей.

Обращаясь к рис. 1, видим, что при уменьшении толщины слоя в сравнении с $H \approx 2/k$ наблюдается увеличение как вещественной, так и мнимой частей безразмерного удельного механического сопротивления ζ . При этом первая (активные потери колеблющейся поверхности) растет быстрее. Разлагая Z в ряд при $kH \ll 1$,

$$Z \approx \frac{\omega\rho}{k} \left(\frac{6(k\delta)^2}{(kH)^3} + \frac{6(k\delta)^2}{5kH} - i \frac{6}{5kH} \right), \quad (17)$$

получаем, что его мнимая и вещественная части пропорциональны $\sim(kH)^{-1}$ и $\sim(kH)^{-3}$ соответственно. При значениях $kH < 0,01$ (воздух) и $kH < 0,1$ (глицерин) активное сопротивление среды оказывается больше реактивного, пропорционального величине присоединенной массы.

Выражение коэффициента потерь η изгибно колеблющейся пластины с массой единицы площади $m_0 = \rho_0 h$ (ρ_0 – плотность материала в кг/м^3) можно записать в виде отношения вещественной части сопротивления Z к его мнимой части [1]:

$$\eta = \frac{\text{Re } Z}{|\text{Im } Z| + \omega m_0}. \quad (18)$$

Численные значения η в функции от kH для случая изгибных колебаний стальной ($\rho_0 = 7800 \text{ кг/м}^3$) пластины толщиной $h = 10^{-3} \text{ м}$, находящейся на границе слоя воздуха и глицерина, приведены на рис. 2. При малых значениях безразмерной толщины kH слоя глицерина значения η больше единицы, что связано, видимо, со сменой колебательного процесса на быстро затухающее

неволновое движение пластины относительно положения равновесия.

Частотные зависимости η при изгибных колебаниях стальной пластины указанной толщины на границе слоя воздуха и глицерина толщиной H , равной 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} м и $H = \infty$, приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

Обращаясь к рисункам, видим, что значения η растут с уменьшением не только толщины слоя, но и частоты колебаний пластины. Физически это может быть объяснено невозможностью существования при $\eta > 1$ низкочастотных колебательных процессов в пластине, находящейся на малом расстоянии от жесткой стенки. При этом в случае слоя глицерина указанное явление возникает в существенно более широком диапазоне частот, чем при колебаниях пластины на границе слоя воздуха с той же толщиной.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке средств вибродемпфирования конструкций, содержащих близко расположенные тонкие, в сравнении с ними, накладные листы.

Библиографический список

1. *Никифоров А.С.* Вибропоглощение на судах. Москва: Транспорт, 1979. 184 с.
2. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6: Гидродинамика. Москва: Физматлит, 2006. 731 с.
3. *Кирпичников В.Ю.* Об учете вязкости в жидкой среде, возмущенной поперечными колебаниями ограничивающей плоской поверхности // Прикладная механика. 1969. Т. 5. Вып. 5. С. 102–106.
4. *Кирпичников В.Ю.* Вибрации и шумоизлучение обтекаемых конструкций судна. Санкт-Петербург: Крыловский гос. научный центр, 2016. 210 с.

References

1. *A. Nikiforov.* Vibration damping aboard ships. Leningrad: Sudostroyeniye, 1979 (*in Russian*).
2. *L.D. Landau, E.M. Lifshiz.* Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit, 2006. 731 p. (*in Russian*).
3. *V. Kirpichnikov.* On consideration of viscosity in fluid medium disturbed by transverse vibration of limiting flat surface // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 5. Issue 5. P. 102–106 (*in Russian*).
4. *V. Kirpichnikov.* Noise and vibration of ship structures in the flow. St. Petersburg: Krylov State Research Centre, 2016. 210 p. (*in Russian*).

Сведения об авторах

Кирпичников Валерий Юлианович, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44. Тел.: +7 (812) 415-48-01. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Петров Александр Александрович, к.ф.-м.н., ведущий инженер ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44. Тел.: +7 (812) 415-48-01. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

About the authors

Valery Yu. Kirpichnikov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-48-01. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Alexandr A. Petrov, Cand. Sci. (Phys. & Math.), Lead Engineer, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-48-01. E-mail: krylov@krylov.spb.ru.

Поступила / Received: 23.10.19
Принята в печать / Accepted: 12.03.20
© Кирпичников В.Ю., Петров А.А., 2020