УДК 537.8
EDN: KOSACO

А.М. Вишневский, А.Я. Лаповок
ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Объект и цель научной работы. Объектом является электрическое поле, которое возникает в проводящей среде при движении намагниченного металлического тела. Цель – расчет электрического поля с учетом границы «металл – среда» и электроизолирующего покрытия на поверхности тела.
Материалы и методы. В работе использованы методы электродинамики медленно движущихся сред.
Основные результаты. Сформулированы дифференциальные уравнения для электрического и магнитного полей, регистрируемых в среде неподвижным наблюдателем при движении источника магнитного поля. Получено аналитическое решение для поступательного движения намагниченного проводящего шара с покрытием.
Заключение. Полученные результаты позволяют производить количественную оценку вклада индукционных процессов при измерении электрического поля движущихся источников магнитного поля.
Ключевые слова: электрическое поле, магнитное поле, намагниченность, электромагнитная индукция, движущиеся среды.
Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

UDC 537.8
EDN: KOSACO

A.M. Vishnevsky, A.Ya. Lapovok
Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

ELECTRIC FIELD OF MOVING SOURCE IN CONDUCTING MEDIUM

Object and purpose of research. This paper discusses electric field created by the magnetized metal body as it moves in the conducting medium. The purpose was to calculate the electric field taking into account metal-medium boundary and dielectric coating on the surface of the body.
Materials and methods. The study followed the methods of electrodynamics of slowly moving media.
Main results. The authors managed to obtain differential equations for electric and magnetic field recorded in the medium by a stationary observer as the source of magnetic field was moving through it. Analytical expression was derived for translational movement of magnetized conducting ball with dielectric coating.
Conclusion. The findings of this study make it possible to quantitatively estimate the contribution of induction processes in electric field measurements of moving sources of magnetic field.
Keywords: electric field, magnetic field, magnetization, induction, moving media.
The authors declare no conflicts of interest.

Введение
Introduction

При решении прикладных задач корабельной электродинамики (идентификация источников электромагнитного поля в проводящей среде, защита от коррозии, вызванной индукционными процессами [1, 2], проектирование электромагнитных измерителей скорости [3]) необходимо оценить электрическое поле (ЭП), возникающее в проводящей среде при взаимном перемещении среды и источников магнитного поля (МП).

Возникающие индукционные процессы можно разделить на две группы.

Для цитирования: Вишневский А.М., Лаповок А.Я. Электрическое поле в проводящей среде при движении источника магнитного поля. Труды Крыловского государственного научного центра. 2026; 2(416): 102–106.
For citations: Vishnevsky A.M., Lapovok A.Ya. Electric field of moving source in conducting medium. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2026; 2(416): 102–106 (in Russian).

К первой группе относятся индукционные эффекты при движении проводящего тела во внешнем магнитном поле, например, в МП Земли. Электрическое поле и связанные с ним коррозионные процессы хорошо исследованы [1, 2].

В статье рассмотрены индукционные процессы второй группы, обусловленные движением источника МП в присутствии проводящей среды. В литературе эти явления называют униполярной индукцией [4].

Формулировка основных уравнений и оценка допущений

Formulation of main equations and assessment of assumptions

Пусть тело с удельной объемной электропроводимостью γ_i, имеющее покрытие с удельным поверхностным сопротивлением ρ и заданное распределение намагниченности **m** в объеме тела, движется равномерно и прямолинейно со скоростью **v** в неподвижной безграничной среде с удельной объемной электропроводимостью γ_e (рис. 1).

При движении намагниченного тела в проводящей среде индуцируется электрический ток с объемной плотностью **j**. Требуется оценить напряженность электрического поля **E**, регистрируемого наблюдателем в точке **r** среды.

Рассматриваются две системы отсчета: движущаяся со скоростью **v**, связанная с источником МП, и неподвижная, связанная со средой. Далее все величины в неподвижной системе отсчета обозначены со штрихом.

В приближении электродинамики медленно движущихся сред и в отсутствие тока смещения ЭП и МП описываются следующими уравнениями [5].

В системе отсчета, связанной с движущимися источниками МП:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0\mathbf{H} - \text{в среде}, \\ \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{m}) - \text{в теле}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \gamma_e\mathbf{E} - \gamma_e(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \text{в среде}, \\ \gamma_i\mathbf{E} - \text{в теле}, \end{cases} \tag{6}$$

где **H** – напряженность МП, **B** – магнитная индукция, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

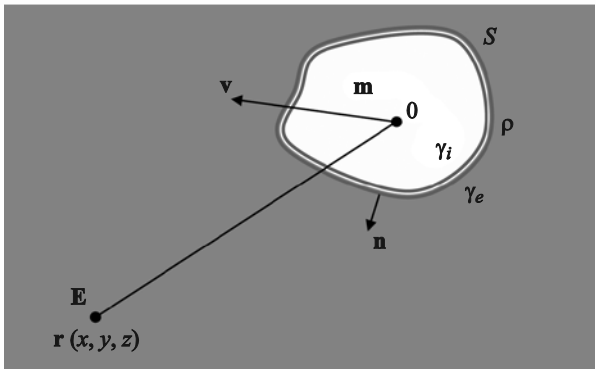

Рис. 1. Источник магнитного поля, движущийся в проводящей среде

Fig. 1. Source of magnetic field moving in conducting medium

В системе отсчета, связанной с неподвижной средой:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}' = \mathbf{j}', \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}' = -\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t'}, \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}' = 0, \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j}' = 0, \tag{10}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{cases} \mu_0\mathbf{H}' - \text{в среде}, \\ \mu_0(\mathbf{H}'+\mathbf{m}') - \text{в теле}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\mathbf{j}' = \begin{cases} \gamma_e\mathbf{E}' - \text{в среде}, \\ \gamma_i\mathbf{E}' + \gamma_i(\mathbf{v}\times\mathbf{B}') - \text{в теле}. \end{cases} \tag{12}$$

Связь характеристик поля в штрихованной и нештрихованной системах координат:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}',\ \mathbf{B} = \mathbf{B}',\ \mathbf{m} = \mathbf{m}',\ \mathbf{j} = \mathbf{j}',\ \mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{13}$$

В движущейся (нештрихованной) системе отсчета зависимость полей от времени отсутствует, в безграничной среде задача является стационарной. В соответствии с (2) в силу безвихревого характера поля **E** введем в этой системе отсчета скалярный потенциал u, положив

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,u.$$

Определим также векторный потенциал **A**, положив

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}.$$

Использование в проводящей среде калибровки Лоренца

$$u = -(\mathbf{v},\ \mathbf{A}) - \frac{\mathrm{div}\,\mathbf{A}}{\mu_0\gamma_e}$$

и уравнения непрерывности электрического тока

$\mathrm{div}(-\gamma_e \,\mathrm{grad}\, u - \gamma(\mathbf{v}\times\mathbf{B})) = 0$

приводит к уравнениям

$$\Delta u + \mu_0 \gamma_e (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})u = -\mu_0 \,\mathrm{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{m}), \tag{14}$$

$$\Delta\mathbf{A} + \mu_0 \gamma_e (\mathbf{v}\,\mathrm{grad})\mathbf{A} = -\mu_0 \,\mathrm{rot}\,\mathbf{m}. \tag{15}$$

Здесь в соответствии с правилами операций с тензорными величинами [6] в декартовой системе координат x, y, z:

$$(\mathbf{v}\,\mathrm{grad})u = v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$(\mathbf{v}\,\mathrm{grad})A_\zeta = v_x \frac{\partial A_\zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_\zeta}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_\zeta}{\partial z},$$

$\zeta = x, y, z$.

При движении элементарного магнитного диполя $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$, находящегося в начале движущейся системы координат, фундаментальные решения уравнений (14), (15) имеют вид

$$u = \mu_0 (\mathbf{v}\times\mathbf{M}, \mathrm{grad}\, G), \tag{16}$$

$$\mathbf{A} = \mu_0 (\mathbf{M}\times \mathrm{grad}\, G). \tag{17}$$

Здесь $G = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-kr-(\mathbf{k},\mathbf{r})}}{r}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ – радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$, $\mathbf{k} = -\frac{1}{2}\mu_0\gamma_e\mathbf{v}$ – волновой вектор в среде, $r = |\mathbf{r}|$, $v = |\mathbf{v}|$, $k = |\mathbf{k}|$ – волновое число, $\mathrm{grad}\, G = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{r}(1+kr)+r^2\mathbf{k}}{r^3}e^{-kr-(\mathbf{k},\mathbf{r})}$, градиент вычисляется по координатам точки наблюдения.

Выражение (16) соответствует потенциалу электрического диполя с моментом

$$\mathbf{P}_0 = -\mu_0 \gamma_e(\mathbf{v}\times\mathbf{M}). \tag{18}$$

Оценим вклад МП индуцированных в среде токов в суммарное магнитное поле (реакцию вихревых токов). При $kr << 1$ (ближнее поле) и одинаковом направлении векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ (диполь движется прямо на наблюдателя)

$$e^{-kr-(\mathbf{k},\mathbf{r})} \cong 1 - 2kr,$$

$$\mathrm{grad}\, G \cong -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{r}(1+2kr)(1-2kr)}{r^3} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{r}(1-4k^2r^2)}{r^3}.$$

В принятых условиях отношение векторного потенциала (17) движущегося диполя к векторному потенциалу неподвижного диполя равно $1 - 4k^2 r^2$. Соответственно, относительная погрешность пренебрежения МП индукционных токов

$\delta = 4k^2 r^2$.

Расстояние, до которого погрешность не превышает величину δ,

$$r = \frac{\sqrt{\delta}}{2k}.$$

Так, при γ_e = 3 См/м, v_x = 10 м/с, δ = 0,01

$r \cong 2650$ м.

В дальнейшем не будем учитывать реакцию вихревых токов. Из левой части уравнений (14) и (15) удалим конвективные члены ($\mathbf{v}$ grad…) и оставим только оператор Лапласа. Намагниченность покоящегося и движущегося тел считаем одинаковой.

Движение намагниченного тела

Movement of magnetized body

Формулы (16) и (18) можно применять для тонкой рамки или проницаемой катушки с током.

Для материального металлического тела уравнения электромагнитного поля (1)–(6) необходимо дополнить граничными условиями для электрического потенциала и его нормальной производной на границе тела S, контактирующей с внешней средой:

$$u_i = u_e + \rho j_n, \tag{19}$$

$$-\gamma_i \frac{\partial u_i}{\partial n} = j_n, \tag{20}$$

$$j_n = -\gamma_e \frac{\partial u_e}{\partial n} - \gamma_e(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_e, \mathbf{n}) =$$

$$= -\gamma_e \frac{\partial u_e}{\partial n} - \gamma_e(\mathbf{v}, \mathbf{B}_e\times\mathbf{n}), \tag{21}$$

где индекс e обозначает внешнюю сторону поверхности S, i – внутреннюю сторону, орт нормали $\mathbf{n}$ направлен во внешнюю среду (рис. 1).

Рассмотрим намагниченный шар радиуса a с магнитным моментом $\mathbf{M}$. Индуцируемое при движении шара электрическое поле внутри шара однородно. Эквивалентный электрический момент шара обозначим $\mathbf{P}_{\text{экв}}$.

На поверхности шара S при $r = a$:

$$u_e = \frac{1}{4\pi\gamma_e}\frac{(\mathbf{P}_{\text{экв}}, \mathbf{r})}{a^3}, \tag{22}$$

$$-\gamma_e \frac{\partial u_e}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\frac{2(\mathbf{P}_{\text{экв}}, \mathbf{r})}{a^4}, \tag{23}$$

Таблица 1. Параметр α эквивалентного электрического диполя
Table 1. Parameter α of equivalent electric dipole

Движущийся источник МП	ρ	γ_i	α
Проницаемое тело	–	–	1
Шар с изоляционным покрытием	∞	≥0	1/2
Шар с проводимостью внешней среды без покрытия	0	γ_e	1/3
Идеально проводящий шар с покрытием	>0	∞	$\dfrac{1}{2+\dfrac{a}{\rho\gamma_e}}$
Идеально проводящий шар без покрытия	0	∞	0

$$j_n = -\gamma_e \frac{\partial u_e}{\partial n} - \gamma_e(\mathbf{v}, \mathbf{B}_e \times \mathbf{n}) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{2(\mathbf{P}_{\text{экв}}, \mathbf{r})}{a^4} + \gamma_e\left(\mathbf{v}, \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}\times\mathbf{r}}{a^4}\right) =$$
$$= \frac{(2\mathbf{P}_{\text{экв}} - \mathbf{P}_0, \mathbf{r})}{4\pi a^4}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = -\frac{j_n}{\gamma_i} = -\frac{(2\mathbf{P}_{\text{экв}} - \mathbf{P}_0, \mathbf{r})}{4\pi\gamma_i a^4}, \tag{25}$$

$$u_i = -\frac{(2\mathbf{P}_{\text{экв}} - \mathbf{P}_0, \mathbf{r})}{4\pi\gamma_i a^3}. \tag{26}$$

Подставляя (22), (24), (26) в (19), получим

$$\mathbf{P}_{\text{экв}} = \alpha\mathbf{P}_0 = -\alpha\mu_0\gamma_e(\mathbf{v}\times\mathbf{M}), \tag{27}$$

где $\alpha = \dfrac{1}{2+\left(\dfrac{\gamma_e}{\gamma_i}+\dfrac{\rho\gamma_e}{a}\right)^{-1}}$.

Значения α для характерных случаев приведены в табл. 1. Величина α = 0 в последней строке таблицы означает, что наблюдатель, движущийся синхронно с идеально проводящим шаром, не регистрирует электрическое поле. Это верно не только для шара, но и для любого металлического тела, проводимость которого на несколько порядков превышает проводимость среды.

Переходя в штрихованную систему координат, в соответствии с (13) получим, что неподвижный наблюдатель в среде регистрирует электрическое поле

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}(\mathbf{P}_{\text{экв}}) - \mathbf{v}\times\mathbf{B} = -\frac{\alpha\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{v}\times\mathbf{M},\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{M}}{r^3}\right] -$$
$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{M},\mathbf{r})(\mathbf{v}\times\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{M}}{r^3}\right]. \tag{28}$$

При α = 0 из (28) следует $\mathbf{E}' = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Это основная формула, используемая для оценки эффектов униполярной индукции при движении намагниченного металлического тела.

На рис. 2 показано электрическое поле $E_y^* = E_y'/(v_x\,\mu_0\,m_z)$ вертикально намагниченного

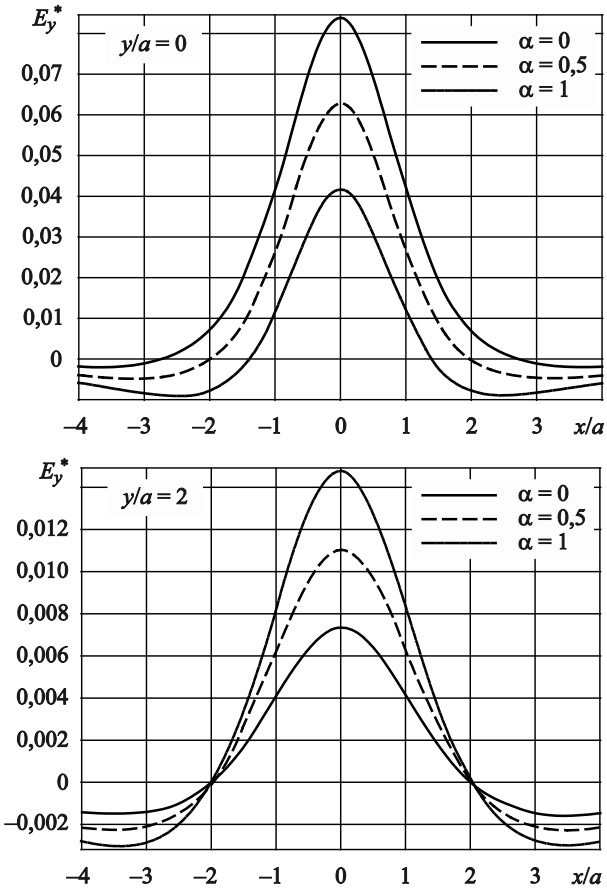

Рис. 2. Электрическое поле движущегося источника магнитного поля при разных α
Fig. 2. Electric field of moving magnetic field source for different α values

шара радиуса a, движущегося вдоль оси x. Неподвижный измерительный датчик расположен на расстоянии $z = 2\alpha$ по вертикали относительно центра шара.

При движении источника МП точно над датчиком ($y/a = 0$) максимальный уровень ЭП наблюдается для металлического шара без покрытия ($\alpha = 0$), минимальный уровень – для проницаемого шара ($\alpha = 1$). Изолированный шар ($\alpha = 0{,}5$) занимает промежуточное положение. При движении со смещением ($y/a = 2$) картина обратная.

Заключение

Conclusion

В условиях электродинамики медленно движущихся сред рассмотрена задача определения электрического и магнитного полей униполярной индукции, возникающей при движении источника магнитного поля в проводящей среде.

На основе анализа дифференциальных уравнений для векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов сделан вывод, что на небольших расстояниях от источника необходимо учитывать только электрическое поле униполярной индукции.

На примере решения модельной задачи о движущемся намагниченном проводящем шаре с покрытием показано, что электрическое поле в среде содержит потенциальную добавку к силе Лоренца $-\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Потенциальная составляющая поля зависит от сопротивления покрытия и соотношения проводимостей среды и движущегося тела.

Список использованной литературы

1. Об электрокоррозии металлов, вызванной индукционными процессами / *Р.А. Павловский, А.М. Вишневский, Ю.Я. Иоссель, И.А. Степанов* // Защита металлов. 1983. Т. 19, № 5. С. 754–758.
2. *Вишневский А.М., Иоссель Ю.Я., Макаров Э.Ф.* Электрокоррозия морских сооружений. Ленинград : Судостроение, 1984. 212 с.
3. *Саранчин А.И., Полковников В.Ф., Завьялов В.В.* Индукционный электронный лаг ИЭЛ-2М : учебное пособие. Владивосток, 2003. 40 с.
4. *Герасимов С.А.* Электродинамика движущегося магнитного диполя и униполярная индукция // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5, № 3. С. 205–211.
5. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. Москва : Мир, 1965. 702 с.
6. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. Москва : Мир, 1964. 775 с.

References

1. *Pavlovsky R.A., Vishnevsky A.M., Iossel Yu.Ya., Stepanov I.A.* On electric corrosion of metals due to induction processes // Protection of Metals and Physical Chemistry of Surfaces. 1983. Vol. 19, No. 5. P. 754–758 (*in Russian*).
2. *Vishnevsky A.M., Iossel Yu.Ya., Makarov E.F.* Electric corrosion of marine structures. Leningrad : Sudostroenie, 1984. 212 p. (*in Russian*).
3. *Saranchin A.I., Polkovnikov V.F., Zavyalov V.V.* Electronic induction log IEL-2M: Training Aid. Vladivostok, 2003. 40 p. (*in Russian*).
4. *Gerasimov S.A.* Electrodynamics of moving magnetic dipole and unipolar induction // Advances in Applied Physics. 2017. Vol. 5, No. 3. P. 205–211 (*in Russian*).
5. *Jackson J.* Classical Electrodynamics (*Russian translation*). Moscow : Mir, 1965. 702 p.
6. *Simonyi K.* Theoretische Elektrotechnik (*Russian translation*). Moscow : Mir, 1964. 775 p.

Сведения об авторах

Вишневский Александр Михайлович, д.т.н., профессор, заместитель начальника 7 отделения ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-65-10. E-mail: 7_otd@ksrc.ru. https://orcid.org/0000-0002-4795-0113.

Лаповок Андрей Яковлевич, к.т.н., ведущий научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-65-33. E-mail: alapovok@gmail.com.

About the authors

Alexander M. Vishnevsky, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Deputy Head of Division, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-65-10. E-mail: 7_otd@ksrc.ru. https://orcid.org/0000-0002-4795-0113.

Andrei Ya. Lapovok, Cand. Sci. (Eng.), Lead Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoe sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-65-33. E-mail: alapovok@gmail.com.

Поступила / Received: 05.02.26
Принята в печать / Accepted: 08.05.26
© Вишневский А.М., Лаповок А.Я., 2026