


## ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ КОРАБЛЯ

УДК 537.86+62-419  
EDN: SKZZXK

О.В. Гримальский<sup>1</sup>, Р.Я. Низкий<sup>1, 2</sup> 

<sup>1</sup> ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕИВАЮЩИХ СВОЙСТВ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ДВУХСТОРОННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

**Объект и цель научной работы.** Объектом является рассеяние электромагнитных волн на конструкциях из многослойных материалов. Цель – разработка численного метода для расчета рассеяния на многослойных конструкциях произвольной формы.

**Материалы и методы.** Граничные условия для электрических и магнитных полей, поверхностные интегральные уравнения, базисные функции Рао – Вильтона – Глиссона, метод моментов.

**Основные результаты.** Обоснованы приближенные граничные условия, связывающие касательные составляющие электрического и магнитного полей на двух поверхностях, ограничивающих многослойный материал, состоящий из однородных слоев. Из граничных условий получены поверхностные интегральные уравнения относительно эквивалентных электрического и магнитного токов на срединной поверхности материала. Поверхностные интегральные уравнения сведены к системе линейных алгебраических уравнений методом моментов с использованием разложения электрического и магнитного токов по базисным функциям Рао – Вильтона – Глиссона. Предложенный метод применен для расчета эффективной площади рассеяния однослойных и многослойных пластин. Выполнено сравнение результатов расчета с результатами, полученными известными численными методами.


**Заключение.** Численные результаты, полученные с помощью приближенных граничных условий, показали хорошее совпадение с результатами, полученными известными численными методами. Предложенный метод требует меньше вычислительных ресурсов по сравнению с точной формулировкой интегральных уравнений на основе формулы Стрэттона – Чу, т.к. в указанном методе неизвестные токи расположены только на срединной поверхности многослойного материала. Метод может быть использован для расчета рассеяния металлическими объектами произвольной формы, покрытыми радиопоглощающими материалами.

**Ключевые слова:** эффективная площадь рассеяния, поверхностные интегральные уравнения, граничные условия, электрические и магнитные токи, функции Рао – Вильтона – Глиссона, радиопоглощающие покрытия.

*Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

## SHIP SIGNATURES

UDC 537.86+62-419  
EDN: SKZZXK

O.V. Grimalskiy<sup>1</sup>, R.Ya. Nizkiy<sup>1, 2</sup> 

<sup>1</sup> Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup> St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

*Для цитирования:* Гримальский О.В., Низкий Р.Я. Моделирование рассеивающих свойств многослойных материалов на основе приближенных двухсторонних граничных условий. Труды Крыловского государственного научного центра. 2024; 1(407): 77–87.

*For citations:* Grimalskiy O.V., Nizkiy R.Ya. Simulation of scattering performance for layered materials based on approximate bilateral boundary conditions. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2024; 1(407): 77–87 (in Russian).

# SIMULATION OF SCATTERING PERFORMANCE FOR LAYERED MATERIALS BASED ON APPROXIMATE BILATERAL BOUNDARY CONDITIONS

**Object and purpose of research.** This paper discusses electromagnetic wave scattering from layered structures. The purpose of the study was to develop a numerical method for calculation of scattering from layered structures of arbitrary shape.

**Materials and methods.** Boundary conditions for electric and magnetic fields, surface integral equations, of Rao-Wilton-Glisson (RWG) basis functions, method of moments.

**Main results.** The paper justifies approximate boundary conditions that link tangential components of electric and magnetic fields on the two surfaces restricting a material made up by a number of uniform layers. These boundary conditions yielded surface integral equations for equivalent electric and magnetic currents on the median surface of material. These equations, in their turn, are reduced to a system of linear algebraic equations as per the method of moments through expansion of electric and magnetic currents as per RWG basis functions. This method was applied to calculate radar cross-section for single- and multi-layered plates. Calculation outputs were further compared with the results obtained as per common numerical methods.

**Conclusion.** Numerical results obtained through approximate boundary conditions have shown a good correlation with the results obtained as per common numerical methods. The method suggested by the authors is less demanding in terms of computer performance than the accurate Stratton-Chou formulation because its only unknowns are the currents on the median surface of layered material. This method may be used to calculate scattering properties for metal objects of arbitrary shape with radar-absorbing coatings.

**Keywords:** radar cross-section, surface integral equations, boundary conditions, electric currents, magnetic currents, RWG functions, radar-absorbing coatings.

*The authors declare no conflicts of interest.*

## Введение

### Introduction

На характеристики радиолокационной заметности кораблей и самолетов существенным образом влияют как геометрия внешних элементов конструкции (корпус, надстройки, мачты – для кораблей; фюзеляж, крылья, воздухозаборники – для самолетов), так и электродинамические характеристики материалов, из которых они изготовлены. При разработке современных объектов техники с низкой радиолокационной заметностью важно иметь инструмент, позволяющий предсказать характеристики рассеяния объекта на этапе проектирования и оптимизировать геометрические и электродинамические параметры.

Наиболее удобным численным методом для создания подобного инструмента представляется метод поверхностных интегральных уравнений (ПИУ). При его использовании рассеянное объектом электромагнитное поле представляется в виде поля эквивалентных источников, расположенных на поверхности объекта. При переходе от поверхностных интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) достаточно разбить на элементы только поверхность объекта, что сильно уменьшает число неизвестных (по сравнению, например, с методом конечных элементов).

Простейшим случаем применения ПИУ является расчет рассеяния идеально проводящим объектом

произвольной формы с помощью интегрального уравнения электрического поля (ИУЭП) [1], в котором неизвестной функцией является распределение электрических токов на поверхности. В случаях, когда необходимо учесть поглощение электромагнитной энергии, но глубина проникновения мала, ИУЭП может быть модифицировано с помощью граничного условия Леонтовича [2]. Тогда вклад в рассеянное поле создают не только электрические, но и магнитные токи, однако их значения на поверхности жестко связаны между собой, поэтому число неизвестных в полученной СЛАУ остается такое же, как для идеально проводящих объектов [3, 4]. Если имеется оболочка, толщина и параметры материала которой таковы, что электромагнитное излучение частично проходит сквозь нее, то для расчета более подходит формулировка [5], в которой поверхностные плотности электрического и магнитного тока являются независимыми неизвестными функциями.

Современные радиопоглощающие покрытия часто составлены из тонких слоев с различными толщинами и электродинамическими характеристиками. В отдельных случаях такое покрытие можно заменить на однородную оболочку с эквивалентными толщиной и диэлектрической и магнитной проницаемостями, вычисленными по измеренным коэффициентам отражения, поглощения и прохождения [6], и применить к однородной оболочке уравнения из [5]. Но это можно сделать толь-

ко для симметричных покрытий, для которых коэффициенты отражения и прохождения при облучении с обеих сторон совпадают (т.к. этим свойством обладает однородный материал фиксированной толщины). Многие радиопоглощающие покрытия, а также рассматриваемый как оболочка металл с нанесенным на него покрытием этим свойством не обладают.

Традиционными методами для расчета рассеяния на многослойных объектах являются ПИУ на основе формул Стрэттона – Чу [7]. В них неизвестными функциями являются электрические и магнитные токи на каждой из границ раздела между слоями, что приводит к увеличению числа неизвестных в СЛАУ и росту требуемых вычислительных ресурсов.

Подход, предложенный в [8], позволяет обойтись токами, расположенными только на одной, т.н. срединной поверхности многослойного материала, равноудаленной от его лицевых поверхностей. С момента выхода публикации [8] прошло 30 лет, но ее результаты остались практически незамеченными среди специалистов по вычислительной электродинамике.

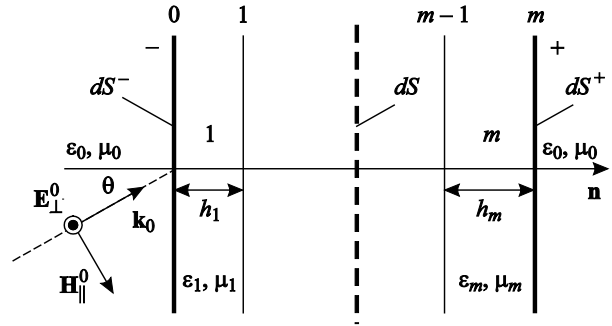
Настоящая статья посвящена обоснованию данного подхода на основе вывода граничных условий, связывающих тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на двух сторонах многослойного материала, его численной реализации и решению контрольных задач.

## Приближенные двухсторонние граничные условия для тонкой многослойной поверхности

Approximate bilateral boundary conditions for a thin multi-layered surface

Рассмотрим многослойную оболочку в поле плоской однородной волны  $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0, \mathbf{k}_0$ . Срединная поверхность  $S$  и толщина  $h$  оболочки характеризуют геометрию тонкой многослойной конструкции, кучочно-однородной по толщине.

Для анализа распределения поля внутри оболочки в поперечном направлении (вдоль толщины  $h$ ) используем приближение локально-плоской волны, т.е. распределение поля в поперечном направлении принимается из решения одномерной задачи для плоскопараллельных слоев, характеристики которых соответствуют локальным поперечным характеристикам оболочки. Согласно принятому приближению локально-плоские волны, определяющие распределение поля в каждом слое,



**Рис. 1.** Элемент  $dS$  многослойной поверхности при нормальной поляризации ( $\mathbf{E}_{\perp}^0, \mathbf{H}_{\parallel}^0$ ) падающей волны

**Fig. 1.** Element  $dS$  of multi-layered surface: normal polarization ( $\mathbf{E}_{\perp}^0, \mathbf{H}_{\parallel}^0$ ) of incoming wave

характеризуются одинаковым значением тангенциального компонента волнового вектора  $\mathbf{k}_{i\tau}$ , т.е. в каждом слое локальное значение  $\mathbf{k}_{i\tau}$  определяется волновым вектором падающей волны:

$$\mathbf{k}_{i\tau} = \mathbf{k}_{0\tau} = -\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{k}_0,$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности  $S$ .

Разложим падающую волну на нормальную (TE) и параллельную (TM) поляризации по отношению к выделенному элементу поверхности  $dS$ . Величины, относящиеся к нормальной или параллельной поляризации, пометим индексами штрих или двойной штрих соответственно, зависимость от времени принимаем в виде  $\exp(j\omega t)$ . Рассмотрим случай нормальной поляризации ( $\mathbf{E}_{\perp}^0, \mathbf{H}_{\parallel}^0$ ) падающей волны (рис. 1).

При нормальной поляризации падающей волны связь между  $\tau$ -компонентами поля на лицевых поверхностях каждого слоя имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\tau}^{(i)} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\tau}^{(i)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}'_i \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\tau}^{(i-1)} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\tau}^{(i-1)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}'_i = \begin{pmatrix} a'_i & b'_i \\ c'_i & d'_i \end{pmatrix}$  – передаточная матрица  $i$ -слоя,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\begin{cases} a'_i = d'_i = \cos \varphi_i \\ b'_i = jt'_i \sin \varphi_i \\ c'_i = jt_i'^{-1} \sin \varphi_i \end{cases}, \quad (2)$$

$$t'_i = \omega \mu_i / k_{in}, \quad (3)$$

$\varphi = k_{in}h_i$ ,  $k_{in} = \sqrt{k_i^2 - k_{0\tau}^2}$ ,  $k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$ ,  $k_{0\tau} = k_0 \sin\theta$ ,  
 $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $k_i$ ,  $h_i$  – волновые числа и толщины  
слоев,  $k_0$  – волновое число вмещающей среды,  
 $j = \sqrt{-1}$ .

Соответственно, связь между  $\tau$ -компонентами  
поля на лицевых поверхностях многослойного эле-  
мента  $dS^{\pm}$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}'_{\tau} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}'_{\tau} \end{pmatrix} = \mathbf{T}' \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}'_{\tau} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}'_{\tau} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'_m \cdot \dots \cdot \mathbf{T}'_2 \cdot \mathbf{T}'_1 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , причем элементы  
передаточной матрицы  $\mathbf{T}'$  обладают свойством  
 $a'd' - b'c' = 1$ . (5)

Формально соотношение (4) характеризует  
двухсторонние граничные условия, однако необхо-  
димо привести эти условия к виду, удобному для  
выбора формулировки и построения вычислитель-  
ной дифракционной модели.

Решая систему (4) относительно  $\mathbf{E}'_{\tau}$ ,  $\mathbf{E}'_{\tau}$   
и умножая результат на  $-\mathbf{n} \times$ , а также учитывая (5),  
получим

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_{\tau} \\ -\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_{\tau} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}'_{\tau} \\ \mathbf{H}'_{\tau} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $b_{1,1} = \frac{a'}{c'}$ ,  $b_{1,2} = \frac{-1}{c'}$ ,  $b_{2,1} = \frac{1}{c'}$ ,  $b_{2,2} = \frac{-d'}{c'}$ .

Решая систему (4) относительно  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}'_{\tau}$ ,  
 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}'_{\tau}$ , получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n} \times \mathbf{H}'_{\tau} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}'_{\tau} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}'_{\tau} \\ \mathbf{E}'_{\tau} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $c_{1,1} = \frac{d'}{b'}$ ,  $c_{1,2} = \frac{-1}{b'}$ ,  $c_{2,1} = \frac{1}{b'}$ ,  $c_{2,2} = \frac{-a'}{b'}$ .

Из соотношений (7) и (6) соответственно  
следуют

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}'_{\tau} - \mathbf{H}'_{\tau}) = Y_E^+ \mathbf{E}'_{\tau} + Y_E^- \mathbf{E}'_{\tau}, \quad (8)$$

$$-\mathbf{n} \times (\mathbf{E}'_{\tau} - \mathbf{E}'_{\tau}) = Y_M^+ \mathbf{H}'_{\tau} + Y_M^- \mathbf{H}'_{\tau}, \quad (9)$$

где  $Y_E^+ = \frac{d'-1}{b'}$ ,  $Y_E^- = \frac{a'-1}{b'}$ ,  $Y_M^+ = \frac{a'-1}{c'}$ ,  $Y_M^- = \frac{d'-1}{c'}$ .

Равенства (8) и (9) можно представить в следу-  
ющем эквивалентном виде:

$$Z'_E \mathbf{n} \times (\mathbf{H}'_{\tau} - \mathbf{H}'_{\tau}) + W'(\mathbf{E}'_{\tau} - \mathbf{E}'_{\tau}) = \frac{(\mathbf{E}'_{\tau} + \mathbf{E}'_{\tau})}{2}, \quad (10)$$

$$-Z'_M \mathbf{n} \times (\mathbf{E}'_{\tau} - \mathbf{E}'_{\tau}) - W'(\mathbf{H}'_{\tau} - \mathbf{H}'_{\tau}) = \frac{(\mathbf{H}'_{\tau} + \mathbf{H}'_{\tau})}{2}, \quad (11)$$

где

$$Z'_E = \frac{1}{Y_E^+ + Y_E^-} = \frac{b'}{a' + d' - 2}, \quad (12)$$

$$Z'_M = \frac{1}{Y_M^+ + Y_M^-} = \frac{c'}{a' + d' - 2}, \quad (13)$$

$$W' = \frac{-(Y_E^+ - Y_E^-)}{2(Y_E^+ + Y_E^-)} = \frac{Y_M^+ - Y_M^-}{2(Y_M^+ + Y_M^-)} = \frac{a' - d'}{2(a' + d' - 2)}. \quad (14)$$

Соотношения (10) и (11) определяют двухсто-  
ронние граничные условия для многослойной по-  
верхности при нормальной поляризации падающей  
волны.

Рассмотрим параллельную поляризацию  
( $\mathbf{E}_{\parallel}^0$ ,  $\mathbf{H}_{\perp}^0$ ) падающей волны. Для данной поляриза-  
ции связь между  $\tau$ -компонентами поля на лицевых  
поверхностях каждого слоя имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\tau}^{(i)} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\tau}^{(i)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i'' \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\tau}^{(i-1)} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\tau}^{(i-1)} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{T}_i'' = \begin{pmatrix} a_i'' & b_i'' \\ c_i'' & d_i'' \end{pmatrix}$  – передаточная матрица  $i$ -слоя,

$$\begin{cases} a_i'' = d_i'' = \cos \varphi_i \\ b_i'' = j t_i'' \sin \varphi_i \\ c_i'' = j t_i''^{-1} \sin \varphi_i \end{cases}, \quad (16)$$

$$t_i'' = -\omega \varepsilon_i / k_{in}. \quad (17)$$

Соответственно, связь между  $\tau$ -компонентами  
поля на лицевых поверхностях многослойного эле-  
мента  $dS^{\pm}$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\tau}'' \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\tau}'' \end{pmatrix} = \mathbf{T}'' \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\tau}'' \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{\tau}'' \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{T}'' = \mathbf{T}''_m \cdot \dots \cdot \mathbf{T}''_2 \cdot \mathbf{T}''_1 = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ ,

причем  $a''d'' - b''c'' = 1$ .

Из соотношения (18) в результате аналогичных предыдущему случаю преобразований получим:

$$Z_E'' \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_\tau^{n+} - \mathbf{H}_\tau^{n-}) + W'' (\mathbf{E}_\tau^{n+} - \mathbf{E}_\tau^{n-}) = \frac{(\mathbf{E}_\tau^{n+} + \mathbf{E}_\tau^{n-})}{2}, \quad (19)$$

$$-Z_M'' \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_\tau^{n+} - \mathbf{E}_\tau^{n-}) - W'' (\mathbf{H}_\tau^{n+} - \mathbf{H}_\tau^{n-}) = \frac{(\mathbf{H}_\tau^{n+} + \mathbf{H}_\tau^{n-})}{2}, \quad (20)$$

где

$$Z_E'' = \frac{-c''}{a'' + d'' - 2}, \quad (21)$$

$$Z_M'' = \frac{-b''}{a'' + d'' - 2}, \quad (22)$$

$$W'' = \frac{-(a'' - d'')}{2(a'' + d'' - 2)}. \quad (23)$$

Соотношения (19) и (20) определяют двухсторонние граничные условия при параллельной поляризации падающей волны.

Можно показать, что при условии

$$k_0^2 / k_i^2 \ll 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (24a)$$

значения  $Z_E'$ ,  $Z_E''$  практически совпадают (аналогично  $Z_M'$ ,  $Z_M''$  и  $W'$ ,  $W''$ ), т.е.

$$\begin{cases} Z_E' \approx Z_E'' = Z_E \\ Z_M' \approx Z_M'' = Z_M \\ W' \approx W'' = W \end{cases}$$

где  $Z_E$ ,  $Z_M$ ,  $W$  вычисляются при нормальном падении ( $\theta = 0$ ) падающей волны.

Условие (24a) означает, что в каждом слое  $\tau$ -компонентом волнового вектора  $k_{i\tau} = k_0 \sin\theta$  локально-плоской волны можно пренебречь по сравнению с  $n$ -компонентом  $k_{in}$ , т.е.

$$k_{in} = \sqrt{k_i^2 - k_{i\tau}^2} \approx k_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Данное условие позволяет объединить поляризации (сложить (10), (11) и (19), (20)). Соответственно, граничные условия примут вид

$$Z_E \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_\tau^+ - \mathbf{H}_\tau^-) + W (\mathbf{E}_\tau^+ - \mathbf{E}_\tau^-) = \frac{(\mathbf{E}_\tau^+ + \mathbf{E}_\tau^-)}{2}, \quad (25)$$

$$-Z_M \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_\tau^+ - \mathbf{E}_\tau^-) - W (\mathbf{H}_\tau^+ - \mathbf{H}_\tau^-) = \frac{(\mathbf{H}_\tau^+ + \mathbf{H}_\tau^-)}{2}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{E}_\tau^\pm = \mathbf{E}_\tau^{\pm} + \mathbf{E}_\tau^{\pm}$ ,  $\mathbf{H}_\tau^\pm = \mathbf{H}_\tau^{\pm} + \mathbf{H}_\tau^{\pm}$ , а величины  $Z_E$ ,  $Z_M$ ,  $W$  вычисляются при  $\theta = 0$  согласно (12)–(14) либо (21)–(23).

## Интегральные уравнения и их численная реализация

Integral equations and their numerical implementation

Будем считать, что толщина  $h = \sum h_i$  многослойной поверхности много меньше длины волны  $\lambda$  стороннего поля, т.е.

$$h/\lambda \ll 1. \quad (24б)$$

При условии (24б) можно пренебречь изменением стороннего поля  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  на расстоянии  $h$  и в качестве источников рассеянного поля использовать поверхностные электрический  $\mathbf{I}$  и магнитный  $\mathbf{J}$  токи, распределенные на срединной поверхности  $S$ . Переходя к поверхностным токам, также примем, что лицевые поверхности  $S^+$ ,  $S^-$  совпадают с  $S$ .

Результирующее поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  является суперпозицией падающего стороннего  $\mathbf{E}^0$ ,  $\mathbf{H}^0$  и рассеянного  $\mathbf{E}^S$ ,  $\mathbf{H}^S$  полей, т.е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^S, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^S. \quad (27)$$

Рассеянное поле  $\mathbf{E}^S$ ,  $\mathbf{H}^S$ , обусловленное поверхностными токами  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^S(\mathbf{r}) = & -j\omega\mu_0 \int_S \mathbf{I}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \\ & -\nabla \int_S \frac{\nabla_S \mathbf{I}(\mathbf{r}')}{-j\omega\epsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \nabla \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^S(\mathbf{r}) = & -j\omega\epsilon_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' - \\ & -\nabla \int_S \frac{\nabla_S \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{-j\omega\mu_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' + \nabla \int_S \mathbf{I}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS', \quad (29) \end{aligned}$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-jk_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ ,  $\nabla_S$  – оператор поверхностной дивергенции.

Причем  $\tau$ -компоненты  $\mathbf{E}^S$ ,  $\mathbf{H}^S$  при  $\mathbf{r} \in S$  терпят разрыв:

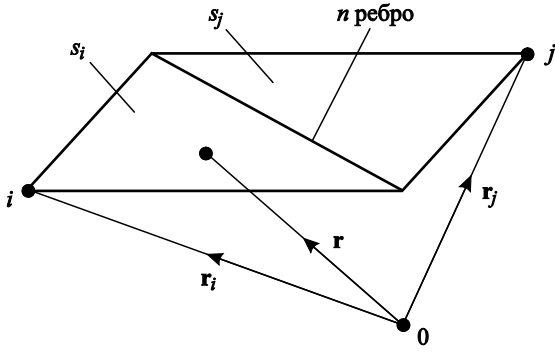
$$\mathbf{I} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_\tau^{S+} - \mathbf{H}_\tau^{S-}), \quad \mathbf{J} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_\tau^{S+} - \mathbf{E}_\tau^{S-}).$$

Принимая во внимание (24б), получим

$$\mathbf{I} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_\tau^+ - \mathbf{H}_\tau^-), \quad \mathbf{J} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_\tau^+ - \mathbf{E}_\tau^-). \quad (30)$$

Из граничных условий (25), (26) с учетом (27)–(30) следует система интегральных уравнений относительно токов  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ :

$$Z_E \mathbf{I}(\mathbf{r}) + W \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_\tau^S(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\tau^0(\mathbf{r}), \quad (31)$$



**Рис. 2.** К построению базисных функций  
**Fig. 2.** On derivation of basis functions

$$Z_M \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{W} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{I}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_\tau^S(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_\tau^0(\mathbf{r}), \quad (32)$$

где

$$\mathbf{E}_\tau^S(\mathbf{r}) = -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^S(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{H}_\tau^S(\mathbf{r}) = -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^S(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S.$$

В результате триангуляции поверхность  $S$  представляется множеством граничных элементов – плоских треугольников  $S_i$ . Для аппроксимации поверхностных токов на элементах строится система базисных функций, формирующих RWG-базис [1]. Согласно [1] каждая базисная функция  $\mathbf{w}_n$  характеризует распределение тока на паре смежных граничных элементов (паре треугольников с общим ребром), т.е.

$$\mathbf{w}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{v}_i(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S_i \\ -\mathbf{v}_j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S_j \\ 0, & \mathbf{r} \notin S_i \cup S_j \end{cases}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{v}_i(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{2s_i}$ ,  $\mathbf{v}_j(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{2s_j}$ ,  $s_i$  и  $s_j$  – площади

треугольников  $S_i$  и  $S_j$  (рис. 2).

Произвольное распределение токов  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$  на  $S$  можно представить в виде разложения по системе базисных функций

$$\begin{cases} \mathbf{I}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{w}_n(\mathbf{p}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^N J_n \mathbf{w}_n(\mathbf{p}) \end{cases}, \quad \mathbf{p} \in S, \quad (34)$$

где  $I_n$  и  $J_n$  – неизвестные коэффициенты разложения, имеющие смысл полных токов, протекающих через ребра треугольных элементов  $S_i$ ,  $N$  – число базисных функций. Методом Галеркина интеграль-

ные уравнения (31), (32) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно  $I_n$  и  $J_n$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{W} + \mathbf{R} \\ \mathbf{W} - \mathbf{R} & \mathbf{Z}^{(j)} + \mathbf{A}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}_{2N} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}_{2N}, \quad (35)$$

где  $\mathbf{W}$  – кососимметричная,  $\mathbf{Z}^{(1)}$ ,  $\mathbf{Z}^{(j)}$ ,  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(j)}$ ,  $\mathbf{R}$  – симметричные квадратные матрицы порядка  $N$ ,

$$\mathbf{A}^{(1)} = j\omega\mu_0 \mathbf{A}^S + \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \mathbf{A}^P, \quad (38)$$

$$\mathbf{A}^{(j)} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{A}^S + \frac{1}{j\omega\mu_0} \mathbf{A}^P, \quad (39)$$

$$W_{mk} = \int_S (\mathbf{w}_m(\mathbf{r}), [\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{w}_k(\mathbf{r})]) W dS,$$

$$Z_{mk}^{(1)} = \int_S (\mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{w}_k(\mathbf{r})) Z_E dS,$$

$$Z_{mk}^{(j)} = \int_S (\mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{w}_k(\mathbf{r})) Z_M dS,$$

$$A_{mk}^S = \int_S \int_S (\mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{w}_k(\mathbf{r}')) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' dS,$$

$$A_{mk}^P = \int_S \int_S \nabla_S \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \nabla_S \mathbf{w}_k(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' dS,$$

$$R_{mk} = - \int_S \int_S [\mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \times \mathbf{w}_k(\mathbf{r}')] \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' dS,$$

$$e_m = \int_S (\mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{E}^0(\mathbf{r})) dS,$$

$$h_m = \int_S (\mathbf{w}_m(\mathbf{r}), \mathbf{H}^0(\mathbf{r})) dS, \quad m = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N.$$

Записывая (35) в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{W} + \mathbf{R} \\ -\mathbf{W} + \mathbf{R} & -\mathbf{Z}^{(j)} - \mathbf{A}^{(j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}_{2N} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ -\mathbf{h} \end{pmatrix}_{2N},$$

получим СЛАУ с симметричной матрицей.

## Численные результаты

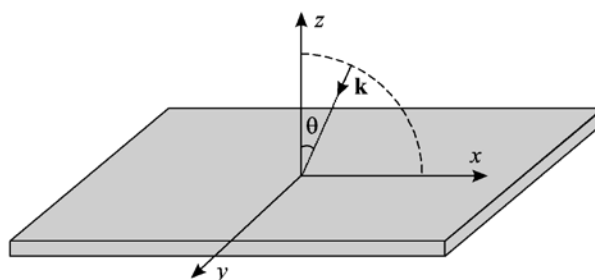
### Numerical results

Для проверки применимости граничных условий (25), (26), интегральных уравнений (31), (32) и их численной реализации для расчета электромагнитных полей, рассеянных тонкими однослойными или многослойными поверхностями, были решены не-

сколько задач из набора Austin RCS Benchmark Suite [9], предназначенного для верификации методов и программ расчета эффективной площади рассеяния (ЭПР).

Для этих задач неизвестны аналитические решения, поэтому полученные результаты расчета сравниваются с результатами численного решения поверхностных интегральных уравнений на основе формул Стрэттона – Чу (ИУ С-Ч). При использовании ИУ С-Ч неизвестные поверхностные токи  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{J}$  располагаются на каждой из сторон каждого из слоев поверхности, что приводит к резкому увеличению (по сравнению с предложенным методом) числа неизвестных СЛАУ и требуемых для ее решения ресурсов, особенно для многослойных поверхностей.

В задаче 1 ([9, задача 2D]) исследуется моноэлектродная ЭПР тонкой магнитоэлектрической прямоугольной пластины в плоскости, перпендикулярной пластине и параллельной ее длинной стороне (рис. 3). Размеры пластины  $26,67 \times 15,64$  см, толщина 1,56 мм. Материал пластины характеризуется относительными проницаемостями  $\epsilon_r = 17 - 0,353j$ ,  $\mu_r = 3,33 - 1,72j$  на частоте 2,56 ГГц и  $\epsilon_r = 16,9 - 0,393j$ ,  $\mu_r = 2,46 - 1,95j$  на частоте 5,12 ГГц. Рассматриваемая поверхность является однослойной, поэтому коэффициент  $W$  в интегральных уравнениях (31), (32) равен нулю. На рис. 4 и 5 представлены моноэлектродные ЭПР пластины для

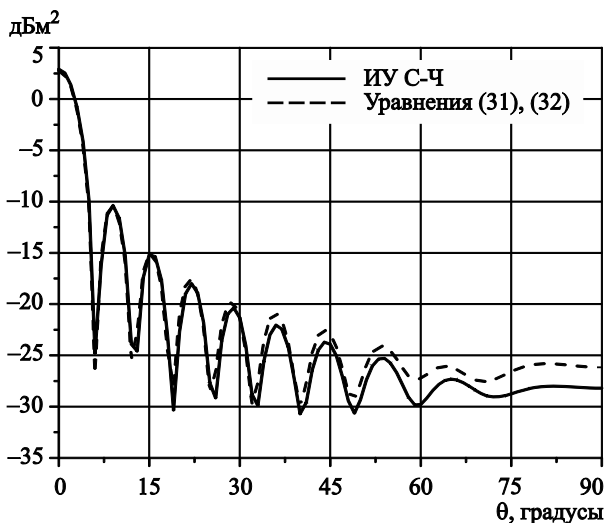


**Рис. 3.** Геометрия задачи 1  
**Fig. 3.** Geometry of Task 1

горизонтальной и вертикальной поляризации падающей волны на частоте 5,12 ГГц в сравнении с результатами ИУ С-Ч.

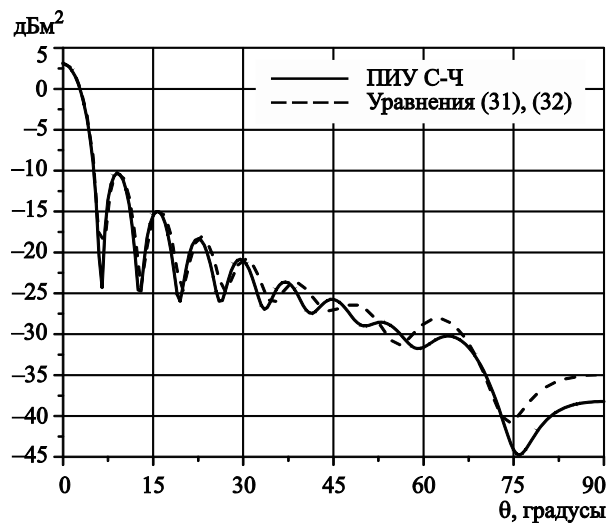
Из графиков видно, что в диапазоне углов  $\theta$  от 0 до  $30^\circ$  ЭПР, полученные с помощью уравнений (31), (32), хорошо повторяют значения ЭПР, полученные из ИУ С-Ч, включая расположение максимумов и минимумов. При дальнейшем увеличении угла  $\theta$  расположение максимумов и минимумов хорошо совпадает только для горизонтальной поляризации.

Задача 2 ([9, задача 2C]) отличается от задачи 1 только материалом пластины. Рассматривается пластина из диэлектрического материала, который характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r = 2,61 - 0,0036j$  на частоте



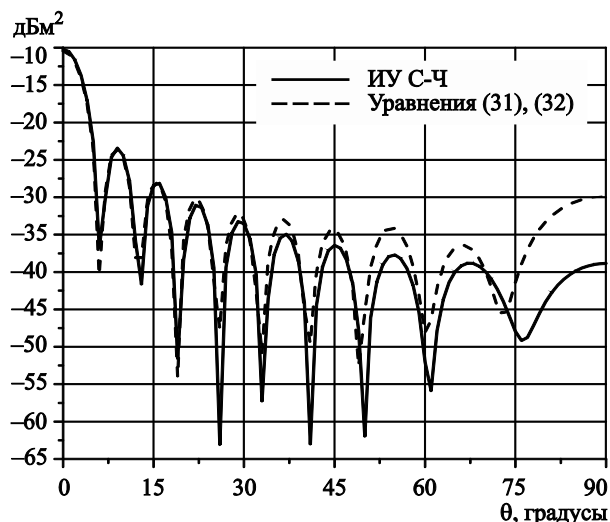
**Рис. 4.** Эффективная площадь рассеяния магнитоэлектрической пластины (задача 1). Частота 5,12 ГГц, горизонтальная поляризация

**Fig. 4.** Effective cross-section of magnetic-dielectric plate (Task 1). Frequency 5.12 GHz, horizontal polarization



**Рис. 5.** Эффективная площадь рассеяния магнитоэлектрической пластины (задача 1). Частота 5,12 ГГц, вертикальная поляризация

**Fig. 5.** Effective cross-section of magnetic-dielectric plate (Task 1). Frequency 5.12 GHz, vertical polarization



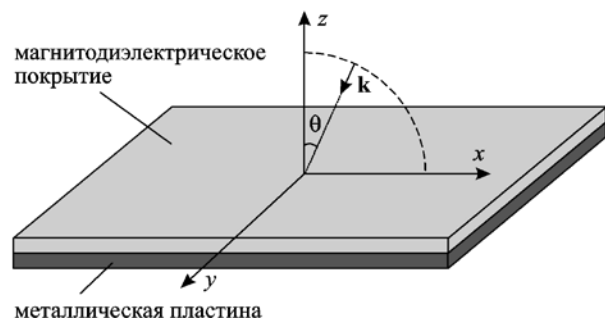
**Рис. 6.** Эффективная площадь рассеяния диэлектрической пластины (задача 2). Частота 5,12 ГГц, горизонтальная поляризация

**Fig. 6.** Effective cross-section of dielectric plate (Task 2). Frequency 5.12 GHz, horizontal polarization

2,56 ГГц и  $\epsilon_r = 2,61 - 0,0354j$  на частоте 5,12 ГГц, а относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  равна 1. На рис. 6 и 7 представлены моностатические ЭПР диэлектрической пластины для горизонтальной и вертикальной поляризаций на частоте 5,12 ГГц.

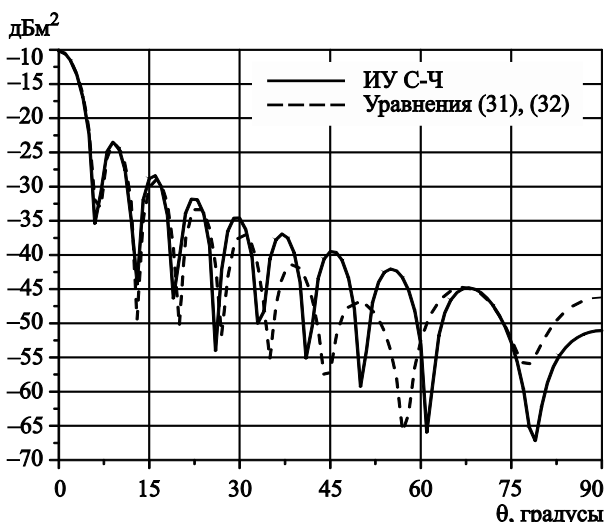
Как и для магнитодиэлектрической пластины, хорошее совпадение результатов, полученных из уравнений (31), (32), с результатами ИУ С-Ч наблюдается только для небольших  $\theta$ . Для горизонтальной поляризации совпадает общий вид графиков (примерно совпадают углы максимумов и минимумов).

В задаче 3 ([9, задача 2Е]) рассматривается металлическая пластина, покрытая слоем магнито-



**Рис. 8.** Геометрия задачи 3

**Fig. 8.** Geometry of Task 3



**Рис. 7.** Эффективная площадь рассеяния диэлектрической пластины (задача 2). Частота 5,12 ГГц, вертикальная поляризация

**Fig. 7.** Effective cross-section of dielectric plate (Task 2). Frequency 5.12 GHz, vertical polarization

диэлектрика. Геометрия задачи показана на рис. 8. Длина и ширина пластины, а также параметры магнитодиэлектрика такие же, как в задаче 1, толщина металлического слоя 1,6256 мм, толщина магнитодиэлектрического слоя 1,5 мм. Для данной задачи коэффициент  $W$  не равен нулю. На рис. 9 и 10 представлены моностатические ЭПР для горизонтальной и вертикальной поляризаций на частоте 5,12 ГГц для задачи 3. Как и для предыдущих задач, общий вид графиков лучше совпадает для горизонтальной поляризации. Большую точность уравнения (31), (32) обеспечивают при падении волны со стороны металлического слоя ( $\theta > 90^\circ$ ).

Задача 4 ([9, задача 2F]) получается из задачи 3 заменой металлического слоя на диэлектрический. Размеры слоев и параметры магнитодиэлектрического слоя остаются такими же, как в задаче 3, параметры диэлектрика берутся из задачи 2. На рис. 11 и 12 представлены моностатические ЭПР для горизонтальной и вертикальной поляризаций на частоте 5,12 ГГц для задачи 4. Значения, полученные из уравнений (31) и (32), несколько превышают значения, полученные из ИУ С-Ч, тогда как для задачи о металлической пластине с магнитодиэлектрическим покрытием значения, полученные из уравнений (31), (32), были меньше, чем значения, полученные из ИУ С-Ч.

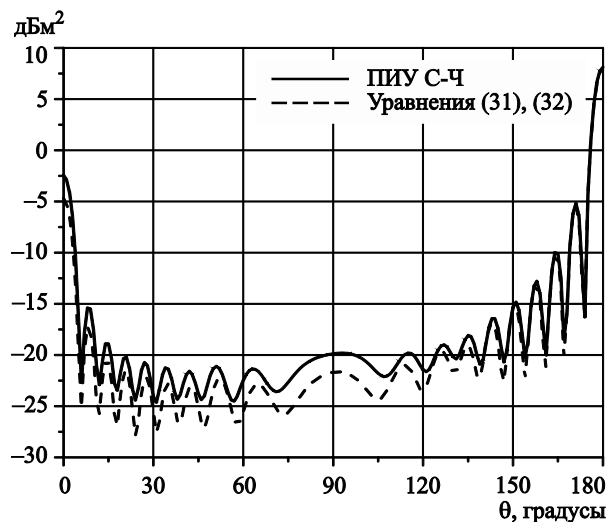


## Заклучение

### Conclusion

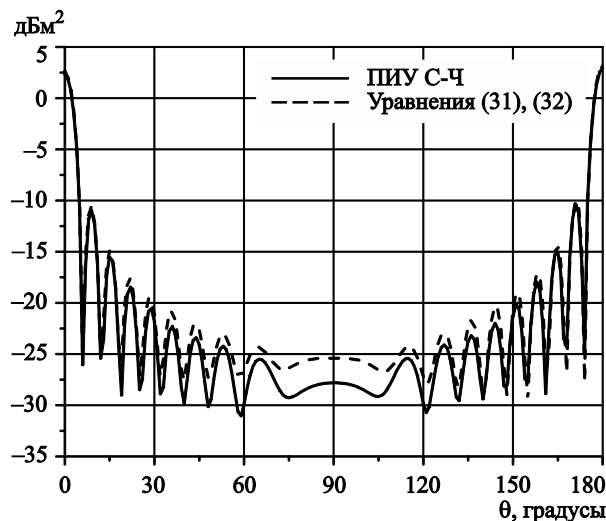
При моделировании рассеяния электромагнитных волн тонкими многослойными покрытиями или оболочками поверхностные интегральные уравне-

ния, в которых неизвестные эквивалентные источники располагаются на одной поверхности (посредине толщины материала), предпочтительны по сравнению с традиционными поверхностными интегральными уравнениями, в которых эквивалентные источники расположены на каждой границе



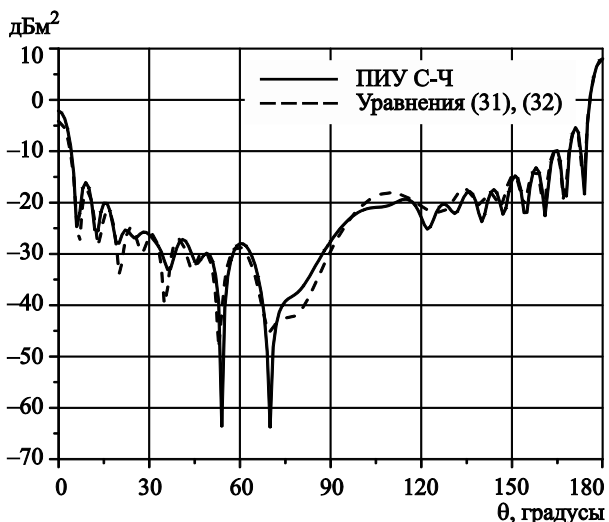
**Рис. 9.** Эффективная площадь рассеяния металлической пластины с магнитоэлектрическим покрытием (задача 3). Частота 5,12 ГГц, горизонтальная поляризация

**Fig. 9.** Effective cross-section of a metal plate with magnetic-dielectric coating (Task 3). Frequency 5.12 GHz, horizontal polarization



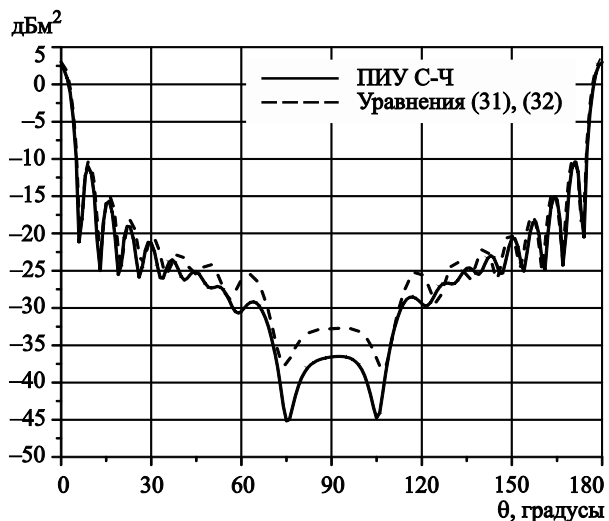
**Рис. 11.** Эффективная площадь рассеяния диэлектрической пластины с магнитоэлектрическим покрытием (задача 4). Частота 5,12 ГГц, горизонтальная поляризация

**Fig. 11.** Effective cross-section of a dielectric plate with magnetic-dielectric coating (Task 4). Frequency 5.12 GHz, horizontal polarization



**Рис. 10.** Эффективная площадь рассеяния металлической пластины с магнитоэлектрическим покрытием (задача 3). Частота 5,12 ГГц, вертикальная поляризация

**Fig. 10.** Effective cross-section of a metal plate with magnetic-dielectric coating (Task 3). Frequency 5.12 GHz, vertical polarization



**Рис. 12.** Эффективная площадь рассеяния диэлектрической пластины с магнитоэлектрическим покрытием (задача 4). Частота 5,12 ГГц, вертикальная поляризация

**Fig. 12.** Effective cross-section of a dielectric plate with magnetic-dielectric coating (Task 4). Frequency 5.12 GHz, vertical polarization

слоев, т.к. приводят к существенной экономии вычислительных ресурсов. Для задач, в которых размер исследуемого объекта во много раз больше длины волны, предложенный метод позволяет рассчитывать радиолокационные характеристики для более широкого диапазона частот.

Результаты расчета эффективной площади рассеяния, полученные с помощью предложенного метода и с помощью поверхностных интегральных уравнений на основе формул Стрэттона – Чу, хорошо совпадают, особенно в диапазоне углов, близких к нормальному падению электромагнитной волны. Выявленные отличия между результатами в основном связаны с вкладом эквивалентных источников на торце многослойного материала, которым пренебрегает предложенный метод. Для большинства практических задач этот вклад мал, а в случае замкнутой поверхности вообще отсутствует. Данный метод может быть использован для расчета рассеяния металлическими объектами произвольной формы, покрытыми радиопоглощающими материалами.

## Список использованной литературы

1. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982. Vol. 30, No. 3. P. 409–418. DOI: 10.1109/TAP.1982.1142818.
2. Леонтович М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Новейшие исследования распространения радиоволн вдоль земной поверхности. Москва ; Ленинград : АН СССР, 1948. Сб. 2 : Исследования по распространению радиоволн. С. 5–12.
3. Glisson A.W. Electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces with impedance boundary conditions // Radio Science. 1992. Vol. 27, No. 6. P. 935–943. DOI: 10.1029/92RS01782.
4. Bendali A., Fares M.B., Gay J. A boundary-element solution of the Leontovitch problem // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1999. Vol. 47, No. 10. P. 1597–1605. DOI: 10.1109/8.805905.
5. Гримальский О.В., Лаповок А.Я. Устранение низкочастотной неустойчивости в вычислительных моделях электромагнитного поля оболочек и проводников // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2006. № 4. С. 26–39.
6. Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients / D.R. Smith, S. Schultz, P. Markoš, C.M. Soukoulis // Physical review B. 2002. Vol. 65, No. 19. P. 195104 (p. 1–7). DOI: 10.1103/PhysRevB.65.195104.
7. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1948. 539 с.
8. Bleszynski E.H., Bleszynski M.K., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1993. Vol. 35, No. 6. P. 14–25. DOI: 10.1109/74.248480.
9. Austin RCS Benchmark Suite // GitHub : [site]. [S.l.], 2023. URL: <https://github.com/UTAustinCEMGroup/AustinCEMBenchmarks> (Accessed: 01.11.2023).

## References

1. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1982. Vol. 30, No. 3. P. 409–418. DOI: 10.1109/TAP.1982.1142818.
2. Leontovitch M. On approximate boundary conditions for electromagnetic field on surface of good conductive bodies // Noveishiye issledovaniya rasprostraneniya radiovoln vdol zemnoy poverhnosti (Latest research in radio wave propagation along terrestrial surface). Moscow, Leningrad : Academy of Sciences of the USSR, 1948. Compendium No. 2. Research on radio wave propagation. P. 5–12 (in Russian).
3. Glisson A.W. Electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces with impedance boundary conditions // Radio Science. 1992. Vol. 27, No. 6. P. 935–943. DOI: 10.1029/92RS01782.
4. Bendali A., Fares M.B., Gay J. A boundary-element solution of the Leontovitch problem // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1999. Vol. 47, No. 10. P. 1597–1605. DOI: 10.1109/8.805905.
5. Grimal'skiy O., Lapovok A. Eliminating low-frequency instability in analytical models for electromagnetic field of shells and conductors // Proceedings of Russian Academy of Sciences. Power Engineering Journal. 2006. No. 4. P. 26–38 (in Russian).
6. Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients / D.R. Smith, S. Schultz, P. Markoš, C.M. Soukoulis // Physical review B. 2002. Vol. 65, No. 19. P. 195104 (p. 1–7). DOI: 10.1103/PhysRevB.65.195104.
7. Stratton J. Electromagnetic theory (Russian translation). Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1948. 539 p.
8. Bleszynski E.H., Bleszynski M.K., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1993. Vol. 35, No. 6. P. 14–25. DOI: 10.1109/74.248480.

9. Austin RCS Benchmark Suite // GitHub : [site]. [S.l.], 2023. URL: <https://github.com/UTAustinCEMGroup/AustinCEMBenchmarks> (Accessed: 01.11.2023).  
ковское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-65-30. E-mail: nizkyroman@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-8019-253X>.

---

### Сведения об авторах

*Гримальский Олег Владимирович*, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (962) 694-43-84. E-mail: o.v.grimalski@mail.ru.

*Низкий Роман Яковлевич*, к.т.н., старший научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Мос-

### About the authors

*Oleg V. Grimalskiy*, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (962) 694-43-84. E-mail: o.v.grimalski@mail.ru.

*Roman Ya. Nizkiy*, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158. Tel.: +7 (812) 415-65-30. E-mail: nizkyroman@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-8019-253X>.

Поступила / Received: 21.12.23  
Принята в печать / Accepted: 28.02.24  
© Гримальский О.В., Низкий Р.Я., 2024