

УДК 534.414+534.6  
EDN: FHGWNB

Ю.Н. Попов<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ НА ПРИМЕРЕ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

**Объект и цель научной работы.** Объект исследований – резонатор Гельмгольца с различными вариациями геометрических параметров, определяющих его резонансную частоту. Цели – обсуждение прикладных вопросов, касающихся численного моделирования акустических резонансных устройств, и сравнительный анализ результатов расчета нижней собственной частоты как одного из ключевых параметров таких устройств.

**Материалы и методы.** В работе использовался метод конечных элементов для моделирования резонатора Гельмгольца и окружающей его безграничной воздушной среды, в которой распространялась плоская акустическая волна. Исследовалась амплитудно-частотная характеристика в контрольной точке в объеме резонатора, по которой определялась искомая резонансная частота.

**Основные результаты.** Основными результатами являются расчеты амплитудно-частотной характеристики резонатора Гельмгольца с различными геометрическими параметрами на численной модели, позволяющей определить его резонансную частоту. Произведен сравнительный анализ результатов оценки резонансной частоты, полученный с помощью аналитической формулы и на численной модели. Осуществлена количественная оценка рассеянной энергии распространяющейся звуковой волны в волноводе с установленным резонатором Гельмгольца.

**Закключение.** Известные аналитические выражения для оценки резонансной частоты резонатора Гельмгольца включают в себя учет различных эмпирических поправок, которые в общем случае не имеют универсального алгоритма применения. Использование современных численных методов позволяет без дополнительных поправок исследовать резонансные характеристики акустических устройств, как это показано на примере резонатора Гельмгольца.

**Ключевые слова:** резонансная частота, резонатор Гельмгольца, добротность, метод конечных элементов.  
*Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

UDC 534.414+534.6  
EDN: FHGWNB

Yu.N. Popov<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup> Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

## NUMERICAL SIMULATION OF ACOUSTIC DEVICE (HELMHOLZ RESONATOR)

**Object and purpose of research.** This paper discusses Helmholtz resonator with different variations of geometric parameters that determine its resonance frequency. The purpose of the study was to discuss the applied aspects of numerical simulation for acoustic resonators, as well as to compare calculation results for the lower natural frequency as one of key parameters for such devices.

**Materials and methods.** This study was a FEM-based simulation of Helmholtz resonator and its environment (infinite air medium) with plane acoustic wave propagating in it. The target parameter was amplitude-frequency response of the check-point in the resonator volume, further used to obtain resonant frequency.

**Main results.** This paper presents calculation results for amplitude-frequency characteristic of Helmholtz resonator with different geometric parameters on a numerical model enabling determination of its resonant frequency. Resonant frequencies

*Для цитирования:* Попов Ю.Н. Численное моделирование акустических устройств на примере резонатора Гельмгольца. Труды Крыловского государственного научного центра. 2024; 3(409): 117–127.

*For citations:* Popov Yu.N. Numerical simulation of acoustic device (Helmholtz resonator). Transactions of the Krylov State Research Centre. 2024; 3(409): 117–127 (in Russian).

were calculated both as per the analytical expression and as per the numerical model, with further comparison of these results. Acoustic wave energy dissipation in the duct with Helmholtz resonator was subject to quantitative assessment.

**Conclusion.** Common analytical expressions for resonant frequency assessment of Helmholtz resonator include consideration of different empirical corrections that generally do not have any universal algorithm of application. Modern numerical methods can be used to investigate resonance parameters of acoustic devices, e.g. Helmholtz resonator, without any additional corrections.

**Keywords:** resonant frequency, Helmholtz resonator, quality-factor, finite-element method.

*The author declares no conflicts of interest.*

## Введение

### Introduction

Резонатор Гельмгольца – широко распространенное в акустике устройство (оно известно более 150 лет и имеет огромное количество модификаций), позволяющее как усиливать, так и снижать уровни звукового давления на определенных частотах. Характерная особенность указанного устройства – длина волны его собственных низкочастотных колебаний значительно больше размеров резонатора. Следовательно, не может быть и речи о стоячей акустической волне в самом резонаторе.

С физической точки зрения резонатор Гельмгольца на низких частотах можно рассматривать как колебательную систему с сосредоточенными параметрами (типа пружинного маятника) с определенными массой и упругостью, что нетипично для акустики сплошных сред. Однако эта особенность устройства позволяет рассчитывать резонансную частоту по относительно простым аналитическим формулам в зависимости от его геометрических размеров.

В классическом понимании в акустике резонатор Гельмгольца – это сосуд с жесткими стенками, который сообщается с внешней средой через небольшое отверстие или трубу, называемую горлом. Резонанс Гельмгольца – явление резонанса воздуха в полости, наиболее известным примером которого является гудение пустой бутылки от потока воздуха, направленного внутрь горлышка нормально к поверхности края. Именно этот случай возбуждения колебаний в статье рассматривается как основной для исследования резонансных характеристик.

В работе также рассматривается численная модель, имитирующая распространение звуковой волны в волноводе, на стенке которого расположен резонатор Гельмгольца, что приводит к эффекту рассеяния энергии звуковой волны на частоте резонанса. На основе этих моделей анализируются процессы, происходящие в резонаторе Гельмгольца, и определяющие факторы, позволяющие более точно его настроить на нужную частоту работы, без понимания которых невозможно проектирование целого класса акустических устройств. Полученные значения для резонансных частот на численных

модулях резонатора Гельмгольца сравниваются с известными аналитическими решениями.

Стоит отметить, что приведенные в статье численные модели резонатора Гельмгольца одинаково пригодны для описания физических процессов, приводящих как к усилению, так и к снижению уровней звуковой волны на резонансе. Наглядный пример модели акустического усилителя – фазоинвертор акустической системы, представляющий собой все тот же резонатор Гельмгольца, возбуждаемый изнутри.

Если резонатор Гельмгольца возбуждать снаружи, он становится режекторным (подавляющим) фильтром, поглощающим энергию внешних колебаний. Глубину режекции можно увеличить за счет потерь в горле резонатора при помощи звукопоглощающего материала, который также без лишнего труда поддается численному моделированию. В данной статье анализ ограничен только внешним возбуждением, со стороны плоской гармонической волны. Резонансные свойства исследуются по результатам расчета амплитудно-частотной характеристики, расположенной в объеме резонатора.

## 1. Обзор теоретических исследований определения собственной частоты резонатора Гельмгольца

### 1. Determination of natural frequency for Helmholtz resonator – Review of theoretical studies

Из классических работ Гельмгольца и Рэлея известно, что резонансная частота колебаний резонатора Гельмгольца (рис. 1) главным образом зависит от геометрических размеров: формы горла (формы и площади сечения  $S$ , длины  $l$ ) и объема резонансной полости  $V$ .

Отметим, что сам Гельмголец [1] предложил оценивать собственную частоту  $f_0$  резонатора по следующей формуле:

$$f_0 = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{2a}{V}}, \quad (1)$$

где  $c_0 = 340$  м/с – скорость звука при нормальном давлении;  $V, \text{ м}^3$  – объем резонатора и горла;  $a, \text{ м}$  – радиус горла.

В технической литературе для упрощенного описания физических принципов работы резонатора Гельмгольца используется акусто-механическая аналогия, описывающая колебания газа в резонаторе под действием внешнего возмущения со стороны звуковой волны во внешней среде. Газ (в частном случае воздух) в горле резонатора представляется сосредоточенной массой и акустическим сопротивлением (потерями на излучение), а деформируемый в объеме резонатора газ – сосредоточенной упругостью.

Такое приближение считается справедливым, если  $a$  – радиус горла – является малым в сравнении с длиной волны. В рамках акусто-механической аналогии может быть введена сосредоточенная (приведенная) упругость или ее обратная величина – эквивалентная податливость объема воздуха в резонаторе. С учетом адиабатической сжимаемости среды податливость объема воздуха может быть представлена в виде:

$$C_{av} = \frac{V}{\rho c_0^2 S}, \quad (2)$$

где  $S$  – площадь сечения горла резонатора (для горла круглого сечения  $S = \pi a^2$ ).

Сосредоточенная (приведенная) масса газа (воздуха) в горле оценивается выражением:

$$M_{ah} = \rho(l + l_s), \quad (3)$$

где  $\rho = 1,21 \text{ кг/м}^3$  – плотность воздуха при нормальном давлении;  $l$  – фактическая длина горла;  $l_s$  – поправка к фактической длине горла, которая может значительно отличаться для различных конструкций резонатора Гельмгольца;  $c_0$  – скорость звука.

Оценочные соотношения для эквивалентной податливости объема воздуха в резонаторе и массы воздуха в горле позволяют использовать известную в теории колебаний формулу для оценки резонансной частоты:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M_{ah} C_{av}}}. \quad (4)$$

Из выражений (2–4) нетрудно получить самую известную формулу для оценки резонансной частоты резонатора Гельмгольца, которая впервые описана еще в работах Рэлея [2]:

$$f_0 = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V(l + l_s)}}. \quad (5)$$

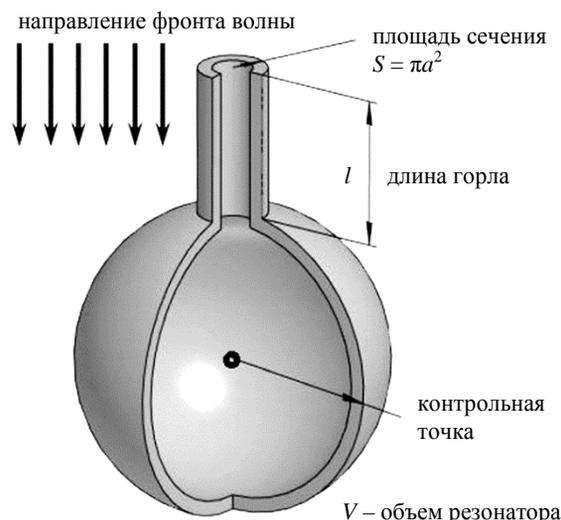


Рис. 1. Геометрия резонатора Гельмгольца

Fig. 1. Geometry of Helmholtz resonator

Добротность может быть оценена по универсальной формуле, применимой к любой колебательной системе:

$$Q = 2\pi f_0 \frac{W}{P_{ah}}, \quad (6)$$

где  $W$  – энергия, запасенная в колебательной системе;  $P_{ah}$  – рассеиваемая мощность.

В работе Рэлея добротность определяется только геометрическими размерами резонатора:

$$Q = \frac{c_0}{f_0} \frac{l + l_s}{S}. \quad (7)$$

Количественная оценка по формулам (5) и (7) не является абсолютно точной. Существуют другие, более поздние, исследования, в которых приведенная податливость объема воздуха и масса воздуха в горле оцениваются с большей детализацией физических процессов. Акусто-механическая модель резонатора Гельмгольца может учитывать потери на излучение  $R_{ah}$ , выражения для которых, в свою очередь, могут отличаться в зависимости от выбранного автором способа описания рассматриваемого физического процесса.

В некоторых научных работах можно встретить формулы, в которых потери на излучение  $R_{ah}$  учитывают кинематическую вязкость газа  $\eta$  или иные параметры, например:

$$R_{ah} = \frac{\sqrt{4\pi\rho\eta f_0}}{\pi a^2} (l + l_{ah}), \quad (8)$$

где  $\eta$ ,  $\text{Нс/м}^2$  – кинематическая вязкость воздуха при комнатной температуре;  $l_{ah}$  – поправка к фактиче-

ской длине горла, причем  $l_s \neq l_{ah}$ . Это связано с тем, что при оценке резонансной частоты поправка  $l_s$  связана с присоединенной массой, а при оценке потерь на излучение поправка  $l_{ah}$  связана с определением объемной скорости звука (ориентировочно можно считать  $l_{ah} \approx 2a$ ).

В таком приближении количественная добротность резонанса может отличаться от значений, получаемых согласно формуле Рэлея (7), т.к.:

$$Q = 2\pi f_0 \frac{W}{P_{ah}} = 2\pi f_0 \frac{M_{ah}}{R_{ah}}. \quad (9)$$

Однако, исходя из описания физического процесса возникновения резонанса, приведенного в работах Рэлея, результаты ряда исследований вызывают определенные вопросы в правильном трактовании и применимости.

Следует отметить, что Рэлей в своих исследованиях [2] обратил внимание на тот факт, что в колебательное движение вовлекается масса воздуха вблизи горла с обоих концов. Он впервые предложил вместо фактической длины горла  $l$  использовать эффективную длину горла  $l + l_s$ , которая повышала точность теоретической оценки резонансной частоты. Рэлей показал [2], что для отверстия в бесконечной перегородке присоединенная длина отверстия  $l_s$  с одной стороны перегородки пропорциональна радиусу отверстия  $a$ , причем имеет место равенство:

$$\frac{\pi}{4} a < l_s < \frac{8}{3\pi} a. \quad (9)$$

Для резонатора Гельмгольца, показанного на рис. 1, можно принять поправку в виде  $l_s = a/2$  (для каждого из торцов горла). Существуют и другие оценки поправки для приведенной длины, например, в [3] приведено отношение  $l_s = 1,7a$  (в Википедии есть ссылка на  $l_s = 0,6a$ ). В дальнейшем в статье при анализе резонанса на численных моделях используются 3 значения поправки к фактической длине в формуле (6):

- 1)  $l_s = 0$  – поправка не учитывалась;
- 2)  $l_s = a$  – поправка согласно работам Рэлея [2];
- 3)  $l_s = 1,7a$  – поправка согласно [3].

Существуют научные исследования [4, 5], в которых неоднократно показано, что поправка к фактической длине горла должна по-разному оцениваться со стороны резонатора  $l_{sr}$  и со стороны внешней среды  $l_{sa}$  (т.е.  $l_{sr} \neq l_{sa}$ ). Неучет данного факта приводит к существенной ошибке в расчетах (до 30%), особенно при малой длине горла резонатора. Кроме этого, существуют узкоспециализированные

работы по конкретным формам резонаторов Гельмгольца, в которых поправки при определении резонансной частоты получены эмпирическим способом на основе эксперимента.

Заслуживают внимания также результаты фундаментальных теоретических исследований при описании работы резонатора Гельмгольца [6], в которых показано, что для описания физических процессов может быть использована физико-математическая модель малой поршневой диаграммы в акустическом экране (или без экрана).

В этом случае излучающий звук элемент соответствует колеблющейся массе, а резонатор представляет объем с небольшим отверстием (без горла). При излучении акустического элемента-отверстия непосредственная окрестность отверстия исключается из рассмотрения. Чтобы исследовать поведение малого отверстия, его представляют в виде тонкой, не имеющей массы диафрагмы. Такую диафрагму понимают как вторичный излучатель звука, для которого можно вычислить акустический импеданс.

$$Z = R_{ah} + iM_{ah}. \quad (10)$$

Если диафрагма вставлена в бесконечно большой акустический экран, то в низкочастотном приближении акустический импеданс имеет вид:

$$R_{ah} = \frac{1}{2} \rho c_0 k^2 a^2 S \text{ и } M_{ah} = 2 \frac{8a\rho}{3\pi} S. \quad (11)$$

Если поршневая диафрагма излучает одной стороной и не вставлена в бесконечный акустический экран, то акустический импеданс имеет вид:

$$R_{ah} = \frac{1}{4} \rho c_0 k^2 a^2 S \text{ и } M_{ah} = \frac{8a\rho}{3\pi} S. \quad (12)$$

При описании резонатора Гельмгольца можно рассматривать физическую модель колебаний виртуальной массы малого по сравнению с длиной волны отверстия. В рамках этой модели соколеблющаяся масса, отнесенная к среднему значению скорости течения через отверстие, определяется выражением [6]:

$$M_{ah} = \frac{\pi^2 a^3 \rho}{4}. \quad (13)$$

Используя выражение для эквивалентной плотности газа в объеме (4) и выражение для акустического импеданса (10), получим выражение:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{M_{ah} C_{av}}} = \frac{c_0}{8} \sqrt{\frac{3a}{V}}. \quad (14)$$

Для количественной оценки добротности можно получить выражение [6], которое определяется только геометрическими параметрами резонатора:

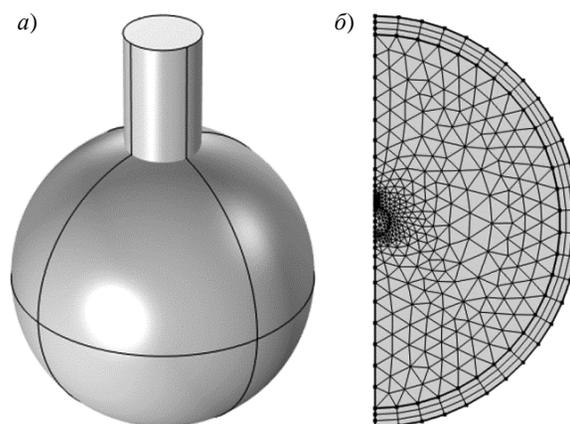
$$Q = \frac{2\pi f_0 M_{ah}}{R_{ah}} = \frac{128}{3\pi^2} \sqrt{\frac{V}{3a^3}}. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) получены на основании того же описания физического процесса возникновения резонанса, что и в исследованиях Рэля. В [6] отмечено, что выражения (14) и (15) могут быть записаны в более точной формулировке. Для этого должны быть использованы рассуждения, которые изначально применил Рэлей при описании резонатора Гельмгольца. Другими словами, для повышения точности должна быть учтена поправка на величину соколеблющейся массы вблизи отверстия и форму отверстия. Кроме этого, при теоретическом описании колебаний газа в отверстии можно отказаться от поршневого движения диафрагмы и перейти к реальной форме колебательного процесса в отверстии. Однако это чрезвычайно усложняет результирующие аналитические выражения.

## 2. Использование численного моделирования при расчете собственной частоты резонатора Гельмгольца

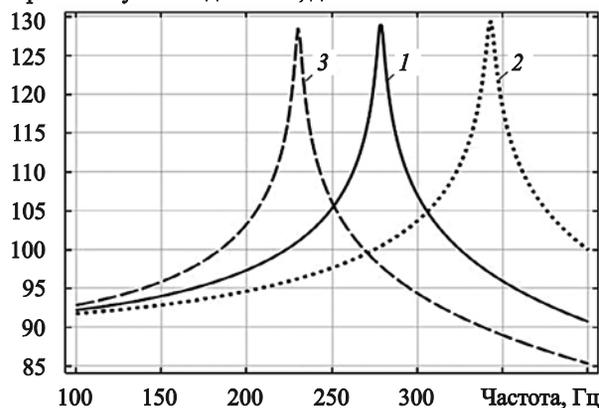
2. Determination of natural frequency for Helmholtz resonator – Numerical simulation

Для анализа собственной частоты резонатора Гельмгольца был использован метод конечных элементов (МКЭ). На рис. 2а показана исследуемая расчетная модель резонатора Гельмгольца с узким горлом. Стенки резонатора заданы абсолютно жесткими. Резонатор помещен в безграничную воздушную среду (рис. 2б). В направлении горловины резонатора падала плоская волна.



**Рис. 2.** Модель резонатора Гельмгольца с горловиной: а) геометрия; б) конечно-элементная модель (в центре) в безграничной воздушной среде  
**Fig. 2.** Model of Helmholtz resonator with bottleneck: а) geometry; б) FE model (center) in infinite air medium

Уровень звукового давления, дБ



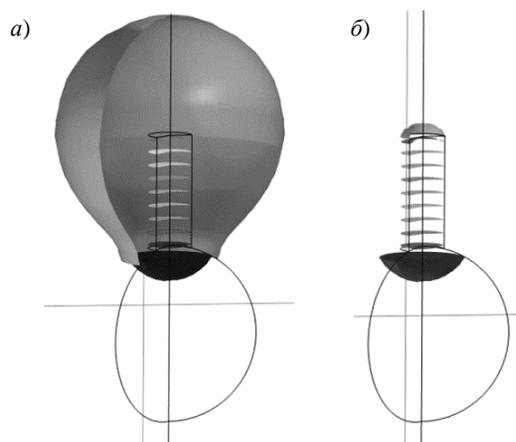
**Рис. 3.** Результаты расчета амплитудно-частотной характеристики резонатора Гельмгольца в зависимости от геометрических размеров (табл. 1)

**Fig. 3.** Calculation results: amplitude-frequency response of Helmholtz resonator as function of geometric dimensions (Table 1)

**Таблица 1.** Результаты расчета резонансных частот по аналитической формуле и на численной модели  
**Table 1.** Calculation results for resonant frequencies: analytical formula vs numerical model

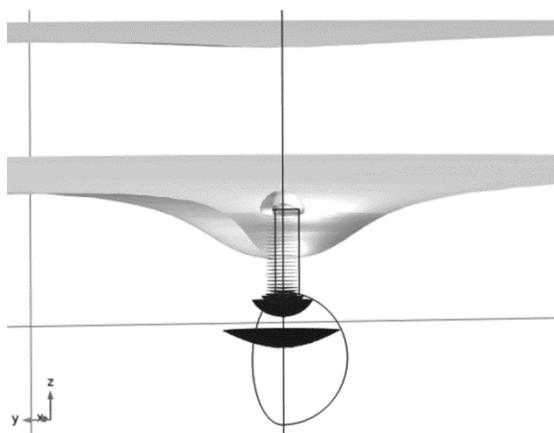
№	$R$ , мм	$a$ , мм	$l$ , мм	$f_0$ , Гц МКЭ	$f_0$ , Гц $l_s = 0$	$f_0$ , Гц $l_s = a$	$f_0$ , Гц $l_s = 1,7a$
1	40	10	30	<b>279</b>	<b>288</b>	250	231
2	40	10	15	<b>343</b>	408	<b>316</b>	280
3	40	10	50	<b>230</b>	<b>223</b>	204	194

Как было отмечено выше [1, 2], резонатор Гельмгольца рассеивает энергию звуковой волны, поэтому дополнительных характеристик поглощения звуковой волны в воздушной среде или на поверхности стенок задавать в численной модели не нужно. В описываемых численных моделях стенки резонаторов являлись абсолютно жесткой поверхностью, окружающая среда описывалась однородным уравнением Гельмгольца, скорость звука и плотность среды являлись вещественными величинами.



**Рис. 4.** Изоповерхности рассеянного поля: а) на резонансной частоте; б) вдали от резонансной частоты

**Fig. 4.** Iso-surfaces of dissipated field: a) at resonant frequency; b) away from resonant frequency



**Рис. 5.** Изоповерхности звукового давления при распространении фронта падающей плоской волны вблизи горловины резонатора Гельмгольца

**Fig. 5.** Iso-surfaces of acoustic pressure: falling plane wave front propagating near Helmholtz resonator bottleneck

На начальном этапе выполнен расчет на численной модели резонансной частоты при различной высоте горла резонатора. Аналитический расчет резонансной частоты выполнен по формуле (6).

В табл. 1 приведены геометрические размеры резонатора Гельмгольца, при которых проводился расчет амплитудно-частотной характеристики численными методами, а также сравнение резонансных частот, полученных на численной модели и аналитическими методами.

На рис. 3 показаны результаты расчета амплитудно-частотной характеристики резонатора Гельмгольца при различных геометрических параметрах (табл. 1) в контрольной точке, показанной на рис. 1.

При выбранной геометрии для моделей № 1 и № 3 наилучшее совпадение расчетных значений резонансной частоты на численной модели получено без использования поправки  $l_s$  в формуле (5). Следует отметить, что при выборе геометрии резонатора с узким и длинным горлом при расчете резонансной частоты по формуле (5) поправка не требуется. При этом достигается полное совпадение с расчетом на численной модели. Это является известным фактом, и поэтому в табл. 1 данный расчет не приведен.

Однако при уменьшении длины горла и увеличении его радиуса (№ 2 в табл. 1) совпадение между аналитическим и численным значениями получается только с учетом поправки к фактической длине. Этот результат коррелирует с другими исследованиями [2] и является более значимым случаем с точки зрения применения резонатора на практике.

Численная модель позволяет непосредственно визуализировать рассеянное акустическое поле, которое непосредственно определяет величину потерь на излучение  $R_{ah}$ . На рис. 4 показаны расчеты рассеянного акустического поля вблизи горловины резонатора на резонансной частоте (рис. 4а) и вдали от нее (рис. 4б). Видно, как возрастает величина рассеянного поля (потерь на излучение) на резонансной частоте.

На рис. 5 показаны изоповерхности звукового давления при распространении фронта падающей плоской волны вблизи горловины резонатора Гельмгольца.

На рис. 6а показана исследуемая модель резонатора Гельмгольца без горловины. Стенки резонатора заданы абсолютно жесткими. В конечно-элементной модели резонатор помещен в безграничную воздушную среду (рис. 6б).

В направлении горловины резонатора падала плоская волна. Геометрия резонатора имеет цилиндрическую форму:  $R$  – радиус резонатора,  $a$  – радиус

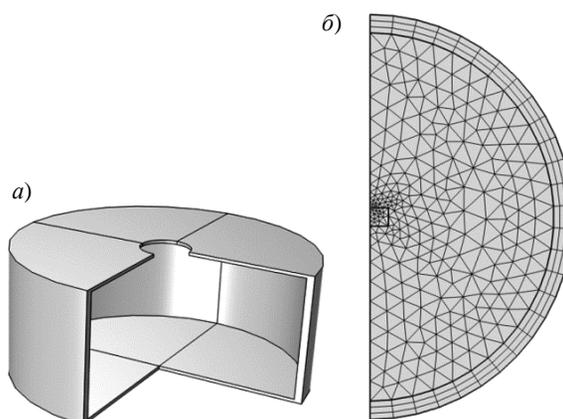
отверстия в резонаторе,  $h$  – высота цилиндра резонатора. Для такой модели может быть использована аналитическая формула (14), полученная для колебаний поршневой диафрагмы. Сравнение результатов расчета резонансной частоты с использованием численной модели и по аналитической формуле приведено в табл. 2.

Очевидно, что нет смысла ожидать совпадения частот, полученных на основе достаточно точного численного метода и приближенной аналитической формулы. Расхождение между резонансной частотой, полученной на численной модели, и резонансной частотой, полученной из аналитической формулы (14), составляло примерно 30 %. Как отмечено выше, точность аналитических выражений можно повысить за счет учета присоединенной массы воздуха, а также отказа от модельного приближения поршневой диаграммы при выводе аналитической формулы. Однако это чрезвычайно усложняет аналитическую формулу для оценки резонансной частоты.

На рис. 7 показаны результаты расчета амплитудно-частотной характеристики резонатора Гельмгольца при различных геометрических параметрах (табл. 2) в контрольной точке внутри объема резонатора (аналогично контрольной точке, показанной на рис. 1).

На рис. 8 показаны изоповерхности звукового давления при распространении фронта падающей плоской волны вблизи горловины резонатора Гельмгольца, полученные на численной модели. Изменение фронта определяется полем местных волн вблизи отверстия резонатора, энергия которых определяет потери на излучение. Вблизи резонансной частоты энергия излучения отверстия максимальная, и, соответственно, потери на излучение имеют максимум.

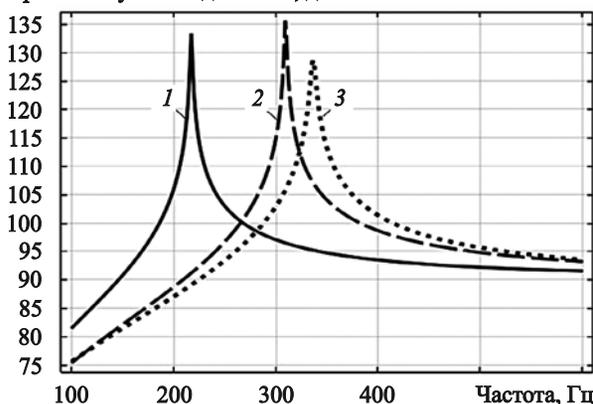
Некоторые физические принципы, свойственные резонаторам, хорошо демонстрируются при использовании приближенных аналитических вы-



**Рис. 6.** Модель резонатора Гельмгольца без горловины: а) геометрия; б) конечно-элементная модель (в центре) в безграничной воздушной среде

**Fig. 6.** Model of Helmholtz resonator without bottleneck: а) geometry; б) FE model (center) in infinite air medium

Уровень звукового давления, дБ



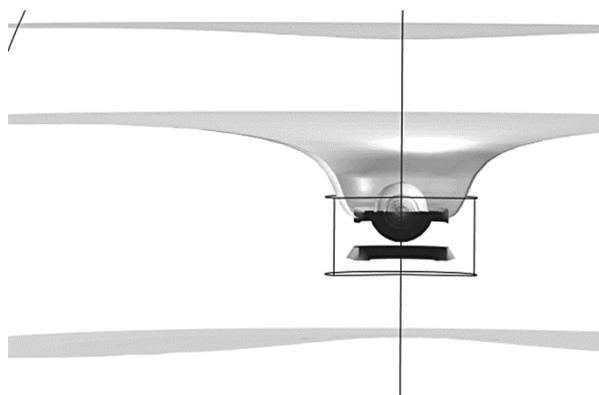
**Рис. 7.** Результаты расчета амплитудно-частотной характеристики резонатора Гельмгольца в зависимости от геометрических размеров (табл. 2)

**Fig. 7.** Calculation results: amplitude-frequency response of Helmholtz resonator as function of geometric dimensions (Table 2)

**Таблица 2.** Результаты расчета резонансных частот по аналитической формуле и с использованием численной модели

**Table 2.** Calculation results for resonant frequencies: analytical formula vs numerical model

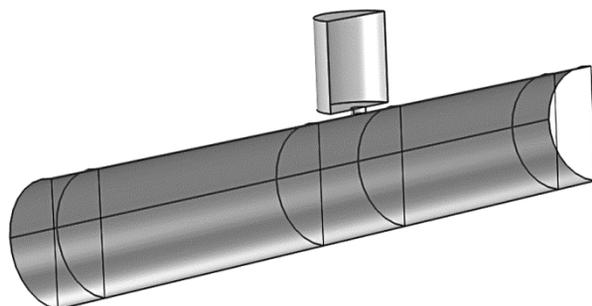
№	$R$ , мм	$a$ , мм	$h$ , мм	$f_0$ , Гц МКЭ	$f_0$ , Гц аналитика
1	80	10	80	217	184
2	50	5	50	309	263
3	60	10	60	336	284



**Рис. 8.** Изменение фронта звуковой волны при падении на горловину резонатора Гельмгольца

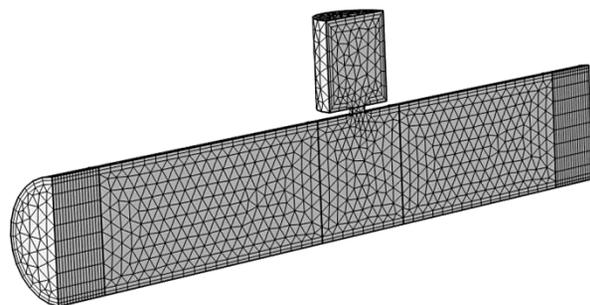
**Fig. 8.** Changes in the front of acoustic wave falling onto Helmholtz resonator bottleneck

ражений для резонансной частоты (5) и (14), а также на численных моделях резонаторов. В частности, для рассмотренных резонаторов Гельмгольца с различными геометрическими размерами показано,



**Рис. 9.** Участок волновода с резонатором Гельмгольца на его стенке в разрезе

**Fig. 9.** Part of waveguide with Helmholtz resonator on its wall (profile section)



**Рис. 10.** Конечно-элементная модель волновода с резонатором Гельмгольца

**Fig. 10.** Finite-element model of waveguide with Helmholtz resonator

что кратное изменение объема приводит к соответствующему изменению резонансной частоты в полном соответствии с аналитическим выражением. К примеру, изменение объема резонатора в 4 раза приводит к изменению частоты в 2 раза абсолютно идентично для численной модели и в аналитической формуле.

Рассмотрим практически значимый случай, когда резонатор Гельмгольца расположен на стенке волновода. Для определенности возьмем волновод круглого сечения. Возможность численного моделирования распространения плоской звуковой волны, а также ограниченного во времени звукового импульса в волноводе с жесткими и импедансными стенками неоднократно показана в научных статьях [9–11].

На рис. 9 показаны в разрезе участок волновода и цилиндрический резонатор Гельмгольца, закрепленный на его стенке. Диаметр волновода 200 мм, длина моделируемого участка волновода 1,5 мм. В рассматриваемом примере выбраны следующие размеры цилиндрического резонатора: радиус  $R = 70$  мм, высота  $h = 150$  мм. Горловина имеет размеры: радиус  $a = 15$  мм, длина  $l = 10$  мм.

На рис. 10 показана конечно-элементная модель волновода с резонатором Гельмгольца.

С одного торца волновода задан источник плоской волны. С другого торца размещен интегратор, позволяющий проводить оценку энергии волны, проходящей через заданное сечение. Модель волновода позволяет делать оценку величины рассеянной энергии, которая определяется параметрами установленного резонатора.

Резонансная частота, рассчитанная по аналитической формуле (6) с различными поправками к фактической длине горла резонатора, имеет значение:

- 1)  $f_0 = \frac{340}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot 0,015^2}{\pi \cdot 0,07^2 \cdot 0,15 \cdot 0,01}} = 299 \text{ Гц}$   
(при  $l_s = 0$ );
- 2)  $f_0 = \frac{340}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot 0,015^2}{\pi \cdot 0,07^2 \cdot 0,15 \cdot 0,025}} = 189 \text{ Гц}$   
(при  $l_s = a$ );
- 3)  $f_0 = \frac{340}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot 0,015^2}{\pi \cdot 0,07^2 \cdot 0,15 \cdot 0,0355}} = 159 \text{ Гц}$   
(при  $l_s = 1,7a$ ).

Очевидно, что для данной конструкции резонатора длина горла является относительно малой

величиной. Согласно исследованиям, начиная с [2], для совпадения с экспериментальными результатами формула (6) должна учитывать определенную поправку к фактической длине горла.

В литературе [7, 8] по этому вопросу можно найти более точные формулы для резонансной частоты такой конструкции волновода, которые практически точно обеспечат совпадение с экспериментом. Такие расчетные формулы содержат набор эмпирически полученных параметров, которые не следуют напрямую из теории, а являются результатом обработки большого массива экспериментальных данных. В данной статье не обсуждаются количественные оценки по этим формулам. Однако следует отметить, что согласно приведенным в литературе [7, 8] данным при выбранной геометрии должна быть получена резонансная частота 169 Гц.

С использованием в статье численной модели волновода с резонатором получено значение для резонансной частоты  $f_0 = 169$  Гц (рис. 11), что точно соответствует результату по эмпирическим формулам [7, 8]. Наиболее близкое значение по классической аналитической формуле получено с поправкой к фактической длине горловины  $l_s = 1,7a$ .

На рис. 11 показано нормированное звуковое давление на выходе к звуковому давлению на входе волновода от частоты. Видно, что вблизи резонансной частоты резонатор полностью рассеивает энергию звуковой волны. При этом на частотах  $f_0 < 150$  Гц и выше  $f > 180$  Гц наличие резонатора Гельмгольца практически не отражается на амплитуде распространяющейся в волноводе плоской волны.

На рис. 12 показано изменение фронта волны, распространяющейся по волноводу, вблизи резонансной частоты. Часть энергии звуковой волны оказывается вовлеченной в колебательный процесс вблизи горловины резонатора и в энергию плоской волны уже не возвращается. В процессе колебаний она рассеивается в виде неоднородных волн, или, используя более привычный термин, поглощается.

На рис. 13 показана амплитудно-частотная зависимость для поглощенной энергии плоской звуковой волны при ее распространении в волноводе с резонатором Гельмгольца. Эффект поглощения энергии на резонансной частоте 169 Гц составил 20 дБ.

## Заключение

### Conclusion

Выполненные исследования на конечно-элементных моделях показали, что аналитические формулы, используемые для определения резонансной

Нормированное звуковое давление

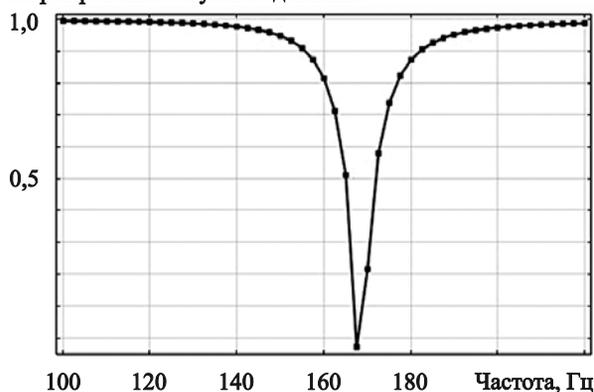


Рис. 11. Амплитудно-частотная характеристика нормированного звукового давления на выходе волновода

Fig. 11. Amplitude-frequency characteristic of non-dimensional acoustic pressure at waveguide outlet

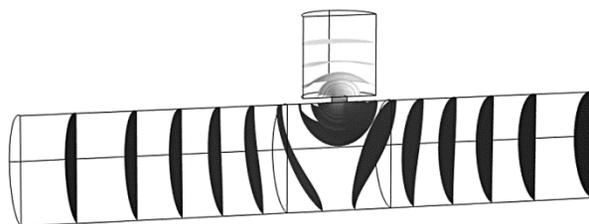


Рис. 12. Изменение фронта волны вблизи резонансной частоты

Fig. 12. Changes in wave front near resonant frequency

Поглощенная энергия, дБ

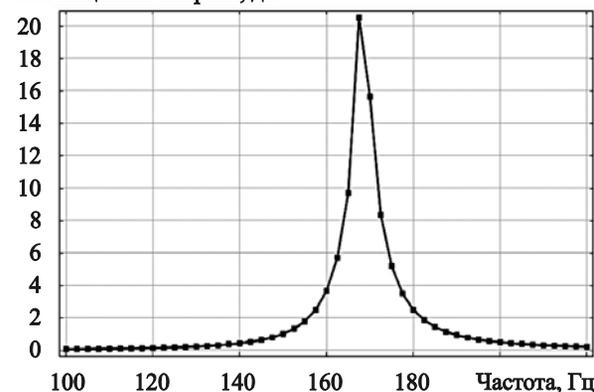


Рис. 13. Амплитудно-частотная характеристика уровня поглощенной энергии на выходе волновода

Fig. 13. Amplitude-frequency characteristic of absorbed energy level at waveguide outlet

частоты резонатора Гельмгольца, в целом являются приближенными. Они не гарантируют точной количественной оценки значения резонансной частоты, но могут быть использованы для качественной оценки с возможной погрешностью результата порядка 30–50 % (для резонатора с длинным и узким горлом погрешность стремится к нулю).

Численные методы позволяют с высокой детализацией описывать физические процессы при резонансе применительно к акустическим устройствам, при этом выполняя как количественные оценки резонансных частот, так и поглощение (усиление) уровней звуковой волны.

Развитие численного моделирования акустических устройств, работа которых основана на физических принципах резонатора Гельмгольца, несомненно, является перспективным направлением, т.к. разработанный математический аппарат позволяет с достаточной степенью точности описывать акустические процессы в таких системах и применять его на практике при разработке устройств снижения шума.

## Список использованной литературы

1. *Helmholtz H. von.* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1860. Bd. 57, No. 1. P. 1–72. DOI: 10.1515/crll.1860.57.1.
2. *Стрэтт Д.В. (лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 2. 2-е изд. Москва : Гостехиздат, 1955. 474 с.
3. Engineering Acoustics / Noise control with self-tuning Helmholtz resonators // Wikibooks : [site]. [S. l.], 2024. URL: [http://en.wikibooks.org/wiki/Engineering\\_Acoustics/Noise\\_control\\_with\\_self-tuning\\_Helmholtz\\_resonators](http://en.wikibooks.org/wiki/Engineering_Acoustics/Noise_control_with_self-tuning_Helmholtz_resonators) (accessed: 16.05.2024).
4. *Ingard U.* On the theory and design of acoustic resonators // Journal Acoustical Society of America. 1953. Vol. 25, No. 6. P. 1037–1061. DOI: 10.1121/1.1907235.
5. *Alster M.* Improved calculation of resonant frequencies of Helmholtz resonators // Journal of Sound and Vibration. 1972. Vol. 24, No. 1. P. 63–85. DOI: 10.1016/0022-460X(72)90123-X.
6. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 1 / Под ред. Ю.М. Сухаревского. Москва : Изд-во иностр. лит., 1958. 617 с.
7. *Norris A.N., Sheng I.C.* Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange // Journal of Sound and Vibration. 1989. Vol. 135, No. 1. P. 85–93. DOI: 10.1016/0022-460X(89)90756-6.
8. *Федотов Е.С., Пальчиковский В.В.* Исследование работы резонатора Гельмгольца в волноводе прямоугольного сечения // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2014. № 38. С. 107–126.
9. *Legusha F., Chizov V., Popov I.* Modeling and estimation of acoustic pulse energy dissipation in a waveguide with elastic walls // International Conference on dynamics and vibroacoustics of machines (DVM-2020). [Piscataway] : IEEE, 2020. P. 1–7. DOI: 10.1109/DVM49764.2020.9243890.
10. *Понов Ю.Н., Лезуша Ф.Ф.* Поглощение акустической волны в волноводе с импедансными граничными условиями // Труды Крыловского государственного научного центра. 2021. Вып. 2(396). С. 113–121. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-2-396-113-121.
11. *Понов Ю.Н., Лезуша Ф.Ф., Румянцев К.А.* О численном моделировании акустического сигнала в волноводе конечной длины // Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики : труды XV Всероссийской конференции. Санкт-Петербург, 2020. С. 358–361.

## References

1. *Helmholtz H. von.* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1860. Bd. 57, No. 1. P. 1–72. DOI: 10.1515/crll.1860.57.1.
2. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh).* The Theory of Sound (*Russian translation*). Vol. 2. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow : Gostekhizdat, 1955. 474 p.
3. Engineering Acoustics / Noise control with self-tuning Helmholtz resonators // Wikibooks : [site]. [S. l.], 2024. URL: [http://en.wikibooks.org/wiki/Engineering\\_Acoustics/Noise\\_control\\_with\\_self-tuning\\_Helmholtz\\_resonators](http://en.wikibooks.org/wiki/Engineering_Acoustics/Noise_control_with_self-tuning_Helmholtz_resonators) (Accessed: 16.05.2024).
4. *Ingard U.* On the theory and design of acoustic resonators // Journal Acoustical Society of America. 1953. Vol. 25, No. 6. P. 1037–1061. DOI: 10.1121/1.1907235.
5. *Alster M.* Improved calculation of resonant frequencies of Helmholtz resonators // Journal of Sound and Vibration. 1972. Vol. 24, No. 1. P. 63–85. DOI: 10.1016/0022-460X(72)90123-X.
6. *Skudrzyk E.* The foundations of acoustics (*Russian translation*). Vol. 1. Moscow : Foreign Languages Publishing House, 1958. 617 p.
7. *Norris A.N., Sheng I.C.* Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange // Journal of Sound and Vibration. 1989. Vol. 135, No. 1. P. 85–93. DOI: 10.1016/0022-460X(89)90756-6.
8. *Fedotov Ye.S., Palchikovskiy V.V.* Helmholtz resonator operation in a box-section waveguide // Aerospace Engineering Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. 2014. Vol. 38. P. 107–126 (*in Russian*).
9. *Legusha F., Chizov V., Popov I.* Modeling and estimation of acoustic pulse energy dissipation in a waveguide with elastic walls // International Conference on dyna-

- tics and vibroacoustics of machines (DVM-2020). [Piscataway]: IEEE, 2020. P. 1–7. DOI: 10.1109/DVM49764.2020.9243890.
10. *Popov Yu.N., Legusha F.F.* Absorption of acoustic wave in waveguide with impedance constraints // Transactions of Krylov State Research Centre. 2021. Vol. 2(396). P. 113–121. DOI: 10.24937/2542-2324-2021-2-396-113-121 (*in Russian*).
  11. *Popov Yu.N., Legusha F.F., Rumyantsev K.A.* Numerical simulation of acoustic signal in waveguide with finite length // Transactions of XV All-Russian Conference “Applied Technologies in Hydroacoustics and Hydrophysics”. St. Petersburg, 2020. P. 358–361 (*in Russian*).

### **Сведения об авторе**

*Попов Юрий Николаевич*, к.т.н., доцент ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»; ведущий научный сотрудник ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: 196158, Россия, Санкт-Петербург, Московское шоссе, д. 44. Тел.: +7 (812) 415-47-25. E-mail: 2360460yk@gmail.com.

### **About the author**

*Yury N. Popov*, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, St. Petersburg State Marine Technical University; Lead Researcher, Krylov State Research Centre. Address: 44, Moskovskoye sh., St. Petersburg, Russia, post code 196158, E-mail: 2360460yk@gmail.com.

Поступила / Received: 24.04.24  
Принята в печать / Accepted: 27.08.24  
© Попов Ю.Н., 2024