

---

DOI: 10.24937/2542-2324-2023-1-S-I-73-82

УДК 629.5.017

EDN: QQWJUN

Д.А. Альбаев 

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет», Санкт-Петербург, Россия

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД НЕЛИНЕЙНОЙ КАЧКИ СУДНА НА ОСНОВАНИИ ТРЕХМЕРНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Проблема оценки мореходности и обеспечения безопасности мореплавания в настоящее время является одной из основных и актуальных для российского судостроения. Для решения данной задачи необходим метод уточнения структуры нелинейных гидродинамических сил, действующих на судно, и вызываемых ими амплитуд качки. Целью настоящей работы является разработка и реализация метода расчета нелинейных сил и амплитуд качки судна второго порядка на основании трехмерной потенциальной теории в бесконечно глубокой жидкости и на мелководье. В работе применяется панельный метод расчета потенциального движения тела, основанный на применении теоремы Грина. Данный подход, в совокупности с методом малого параметра, позволяет уточнить структуру сил и амплитуд за счет учета составляющих второго порядка малости. Представлены численный метод и программы для расчета нелинейных сил различных категорий и амплитудно-частотных характеристик качки. Проведена апробация расчетов каждой отдельной категории нелинейных сил с расчетами по двумерной теории как в бесконечно глубокой жидкости, так и на мелководье. Продемонстрировано, что каждая категория нелинейных сил в зонах супергармонических резонансов основных видов качки имеет равнозначный вклад. Приведено сравнение результатов амплитудно-частотных характеристик с экспериментальными данными. Проведены исследования влияния курсового угла и относительной глубины на нелинейные силы и амплитуды качки второго порядка для различных типов судов. Показано значительное влияние данных параметров. Полученные результаты говорят о корректности представленного метода и необходимости учета нелинейных сил и амплитуд качки для точной оценки мореходности и обеспечения безопасности мореплавания.

**Ключевые слова:** качка, метод малого параметра, трехмерная потенциальная теория, функция Грина, нелинейные силы.

*Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.*

DOI: 10.24937/2542-2324-2023-1-S-I-73-82

UDC 629.5.017

EDN: QQWJUN

D.A. Albaev 

St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

## ESTIMATION OF NON-LINEAR AMPLITUDES OF SHIP MOTIONS BASED ON THREE-DIMENSIONAL POTENTIAL THEORY

Seaworthiness and safety of navigation is among the essential and topical problems of the Russian shipping industry. A method for refining the structure of non-linear hydrodynamic forces exciting amplitudes of ship motions is needed for addressing these issues. The purpose of this study is to develop and implement the method for estimation of non-linear forces and second order amplitudes of ship motions in infinitely deep and shallow water. A panel method is used for calculation of potential motion based on Green theorem. This approach together with the small parameter method enables refined estimations of force and amplitude patterns taking care of second order infinitesimal components. The numerical method and software are presented for calculating various categories of non-linear forces and ship responses. Estimations of each individual category of non-linear forces are verified by two-dimensional theory calculations for infinitely deep as well as shallow water conditions.

It is demonstrated that each category of non-linear forces in the zones of superharmonic resonances of main ship motions types have similar contributions. The estimated amplitude-frequency responses are compared with experimental data. The effect of heading angles and relative depths on non-linear forces and second order amplitudes are investigated for various ship types. It is shown that the influence of these parameters is significant. The results confirm that the proposed method is

---

*Для цитирования:* Альбаев Д.А. Определение амплитуд нелинейной качки судна на основании трехмерной потенциальной теории. Труды Крыловского государственного научного центра. 2023; Специальный выпуск 1: 73–82.

*For citations:* Albaev D.A. Estimation of non-linear amplitudes of ship motions based on three-dimensional potential theory. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2023; Special Issue 1: 73–82 (in Russian).

corrects and support the need to take into account non-linear forces and ship motions amplitudes for correct assessment of seaworthiness and navigation safety.

**Keywords:** ship motions, small parameter method, three-dimensional potential theory, Green function, non-linear forces.

*The author declares no conflicts of interest.*

## Введение

### Introduction

Одна из главных проблем динамики морских объектов связана с исследованием взаимодействия судна с окружающей средой в условиях сильного волнения. Такое взаимодействие, как правило, является нелинейным: судно под действием гидродинамических сил совершает полигармонические колебания. От корректного определения нелинейных сил в этой задаче зависят точность определения характеристик мореходности и оценка безопасности судна.

Анализ существующих работ приводит к следующим проблемам: определение вторых производных в граничных условиях [5, 7]; интегрирование граничного условия на свободной поверхности [8, 9]; во всех работах приведено ограниченное число расчетов нелинейных сил, а результаты для различных судов и вовсе отсутствуют; также работы характерны отсутствием исследований, посвященных влиянию относительной глубины и курсового угла.

В связи с вышеизложенным, целями настоящей работы являются: разработка программы, позволяющей напрямую определять потенциалы второго порядка; определение нелинейных сил различных категорий; определение амплитуд второго порядка качки; исследование изменения курсового угла и глубины на амплитудно-частотной характеристике (АЧХ).

## Описание метода

### Method description

Согласно методу малого параметра [1] потенциал скорости движения жидкости второго порядка может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(x, y, z, t) = & \left( \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i^2 \varphi_{ii}^{(2)}(x, y, z) \right) e^{-j2\omega t} + \\ & + \left( e_{77}^2 \varphi_{77}^{(2)}(x, y, z) \right) e^{-j2\omega t} + \\ & + \left( \sum_{i=1, k=1}^6 \varepsilon_i \varepsilon_j \varphi_{ik}^{(2)}(x, y, z) \right) e^{-j2\omega t} + \\ & + \left( \sum_{i=1}^6 \varepsilon_7 \varepsilon_i \varphi_{i7}^{(2)}(x, y, z) \right) e^{-j2\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Линеаризованное граничное условие для потенциала второго порядка на смоченной поверхности судна в общем виде [2]:

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial n} = Q_B = -n(\bar{X}^{(1)} \cdot \nabla) \nabla \Phi^{(1)} + (V^{(1)} - \nabla \Phi^{(1)}) N^{(1)} + V^{(2)} n + \frac{\partial H}{\partial t} r, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{X}^{(1)} = & \begin{cases} \xi_g^{(1)} + (\psi^{(1)} z - \chi^{(1)} y) \\ \eta_g^{(1)} - (\theta^{(1)} z - \chi^{(1)} x) \\ \zeta_g^{(1)} + (\theta^{(1)} y - \psi^{(1)} x) \end{cases}; \\ V^{(1)} = & \begin{cases} \dot{\xi}_g^{(1)} + (\dot{\psi}^{(1)} z - \dot{\chi}^{(1)} y) \\ \dot{\eta}_g^{(1)} - (\dot{\theta}^{(1)} z - \dot{\chi}^{(1)} x) \\ \dot{\zeta}_g^{(1)} + (\dot{\theta}^{(1)} y - \dot{\psi}^{(1)} x) \end{cases}; \\ N^{(1)} = & \begin{cases} \psi^{(1)} \cos(n, z) - \chi^{(1)} \cos(n, y) \\ -\theta^{(1)} \cos(n, z) + \chi^{(1)} \cos(n, x) \\ \theta^{(1)} \cos(n, y) - \psi^{(1)} \cos(n, x) \end{cases}; \\ V^{(2)} = & \begin{cases} \dot{\xi}_g^{(2)} + (\dot{\psi}^{(2)} z - \dot{\chi}^{(2)} y) \\ \dot{\eta}_g^{(2)} - (\dot{\theta}^{(2)} z - \dot{\chi}^{(2)} x) \\ \dot{\zeta}_g^{(2)} + (\dot{\theta}^{(2)} y - \dot{\psi}^{(2)} x) \end{cases}; \\ H = & -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi^{2+\chi^2} & 0 & 0 \\ -2\theta\psi & \theta^2 + \chi^2 & 0 \\ -2\theta\chi & -2\psi\chi & \theta^2 + \psi^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Линеаризованное граничное условие для потенциала второго порядка на свободной поверхности примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \zeta} - \frac{4\omega^2}{g} \Phi^{(2)} = Q_F = & -\frac{j\omega}{g} (\nabla \Phi^{(1)})^2 + \\ & + \frac{j\omega}{2g} \Phi^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\Phi^{(1)}}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя разложение (1) в общие нелинейные граничные условия на смоченной поверхности судна (2) и на свободной поверхности (3) и группируя составляющие относительно  $\varepsilon_i^2, \varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_7, \varepsilon_i, \varepsilon_7^2$ , получим:

В случае изолированных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i1}^{(2)}}{\partial n} &= Q_{Bii_1} = -\frac{j}{2} n (X_i^{(1)} \cdot \nabla) \nabla \Phi_i^{(1)} - \\ &- \frac{j}{2} \nabla \Phi_i^{(1)} N_i^{(1)}; \\ \frac{\partial \Phi_{i1}^{(2)}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \Phi_{i1}^{(2)} &= Q_{Fii_1} = \\ &= -\frac{j\omega}{g} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{j\omega}{2g} \Phi_i^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \Phi_i^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \Phi_i^{(1)}}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial \Phi_{i2}^{(2)}}{\partial n} &= Q_{Bii_2} = V_i^{(2)} n; \quad \frac{\partial \Phi_{i2}^{(2)}}{\partial z} - \frac{4\omega}{g} \Phi_{i2}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае взаимодействия различных видов колебаний граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{ik}^{(2)}}{dn} &= Q_{Bik} = -\frac{1}{2} n (X_i^{(1)} \cdot \nabla) \nabla \Phi_k^{(1)} - \\ &- \frac{j}{2} n (X_k^{(1)} \cdot \nabla) \nabla \Phi_i^{(1)} + \frac{j}{2} (V_i^{(1)} - \nabla \Phi_k^{(1)}) N_k^{(1)} + \\ &+ \frac{j}{2} (V_k^{(1)} - \nabla \Phi_i^{(1)}) N_i^{(1)} + \frac{j}{2} \frac{\partial H_{ik}}{\partial t} r; \\ \frac{d\Phi_{ik}^{(2)}}{dz} - \frac{4\omega^2}{g} \Phi_{ik}^{(2)} &= Q_{Fik} = -2 \frac{j\omega}{g} (\nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_k) + \\ &+ \frac{j\omega}{2g} \Phi_i^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{j\omega}{2g} \Phi_k \left( \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

При взаимодействии отдельных видов колебаний и волнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i7}^{(2)}}{\partial n} &= Q_{Bi7} = -\frac{j}{2} n (X_i^{(1)} \cdot \nabla) \times \\ &\times \nabla \Phi_{07}^{(1)} - \frac{j}{2} \nabla \Phi_{07}^{(1)} N_i^{(1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{i7}^{(2)}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \Phi_{i7}^{(2)} &= Q_{Fi7} = \\ &= -2 \frac{j\omega}{g} (\nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_{07}) + \\ &+ \frac{j\omega}{2g} \Phi_i^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \Phi_{07}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \Phi_{07}}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{j\omega}{2g} \Phi_{07} \left( \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Phi_{07}^{(1)} = \Phi_0^{(1)} + \Phi_7^{(1)}$  – суммарный потенциал набегающего и дифрагированного волнения.

Нелинейные граничные условия при взаимодействии набегающего и дифрагированного волнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{07}^{(2)}}{\partial n} &= Q_{B07}; \\ \frac{\partial \Phi_{07}^{(2)}}{\partial z} - \frac{4\omega^2}{g} \Phi_{07}^{(2)} &= Q_{F07} = \\ &= -\frac{j\omega}{g} (\nabla \Phi_7^{(1)})^2 - \frac{j\omega}{2g} \Phi_{07}^{(1)} \left( \frac{\partial^2 \Phi_7^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \Phi_7^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В случае бесконечно глубокой жидкости –  $Q_{B07} = 0$ , в случае жидкости ограниченной глубины –  $Q_{B07} = -\partial \Phi_0^{(2)} / \partial n$ .

Потенциал второго порядка набегающего волнения:

$$\Phi_0^{(2)} = -\frac{3j\omega a_w^2 \cosh(2\mu_0(z+H))}{8 \sinh^2(\mu H)} e^{2j\mu(x\cos\beta+y\sin\beta)} e^{-j2\omega t}. \quad (10)$$

Потенциалы  $\Phi_{i2}^{(2)}$ , имеющие место при изолированных колебаниях (6), определяются аналогично потенциалам первого порядка из системы интегральных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Phi_{i2}^{(2)} + \frac{1}{4} \iint_{\Omega} \Phi^{(2)} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial n} d\Omega &= \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} Q_{Bii_2} G^{(2)} d\Omega, \quad i = 1 \dots 6. \end{aligned} \quad (11)$$

Все остальные потенциалы определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Phi^{(2)} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \Phi^{(2)} \frac{\partial G^{(2)}}{\partial n} d\Omega &= \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} Q_B G^{(2)} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_F} Q_F G^{(2)} dS_F. \end{aligned} \quad (12)$$

Если задача решается для бесконечно глубокой жидкости, функция Грина  $G^{(2)}$  определяется следующей формулой:

$$G^{(2)} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + 8v \int_0^\infty \frac{e^{k(z+\zeta)}}{k-4v} J_0(kR) dk + j8\pi v e^{4v(z+\zeta)} J_0(4vR). \quad (13)$$

Для жидкости ограниченной глубины:

$$G^{(2)} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \int_0^\infty \frac{2(k+4v)e^{-kh} \cosh k(z+h)}{k \sinh kh - 4v \cosh kh} \cosh k(\zeta+h) \times J_0(kR) dk + j2\pi \frac{2((\mu_{04})^2 - (4v)^2 \cosh \mu_{04}(z+h))}{((\mu_{04})^2 - (4v)^2)h + 4v} \times \cosh \mu_{04}(\zeta+h) J_0(\mu_{04}R). \quad (14)$$

Основные трудности решения задачи и определения потенциалов второго порядка возникают при определении вторых производных, входящих в граничные условия на смоченной и свободной поверхности. Прямое вычисление данных производных приводит к серьезным численным погрешностям. Однако благодаря использованию векторных преобразований, а также теоремы Стокса и теоремы Гаусса вычисления данных производных можно избежать [6]. Применение векторных преобразований и теоремы Стокса для вторых производных, входящих в граничное условие на смоченной поверхности, дает:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} n \left[ (\bar{X}^{(1)} \cdot \nabla) \nabla \Phi^{(1)} \right] G^{(2)} d\Omega = \\ & = \iint_{\Omega} \left[ n \cdot \bar{X}^{(1)} \right] \left[ \nabla \Phi^{(1)} \nabla_{\zeta} G^{(2)} \right] d\Omega - \\ & - \iint_{\Omega} \frac{d\Phi^{(1)}}{dn} \left[ \bar{X}^{(1)} \cdot \nabla_{\zeta} G^{(2)} \right] d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \left[ n \left( (\nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla) \bar{X}^{(1)} \right) \right] G^{(2)} d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \left[ \nabla \Phi^{(1)} \times \bar{X}^{(1)} \right] G^{(2)} s dl, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $s_x = n_y / \sqrt{1-n_z^2}$ ,  $s_y = -n_x / \sqrt{1-n_z^2}$ ,  $s_z = 0$ . При этом  $\nabla \xi$  означает, что производные от функции Грина должны браться по координатам  $\xi, \eta, \zeta$ .

Для обхода второй производной, входящей в граничное условие на свободной поверхности, согласно [6], можно получить:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_F} \Phi_n^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_n^{(1)}}{\partial z^2} G^{(2)} dS_F = \\ & = - \iint_{WL+PC} \Phi_n^{(1)} \left( \nabla \Phi_n^{(1)} \cdot n \right) G^{(2)} dl + \\ & + \iint_{S_F} \left( \nabla \Phi_n^{(1)} \nabla \Phi_n^{(1)} \right) G^{(2)} dS_F + \\ & + \iint_{S_F} \Phi_n^{(1)} \left( \nabla \Phi_n^{(1)} \nabla_{\xi} G^{(2)} \right) dS_F. \end{aligned} \quad (16)$$

В выражении (16) берется по контуру ватерлинии судна и по контуру, ограничивающему свободную поверхность жидкости на достаточно большом удалении от судна. При этом нормали к поверхности, ограниченной ватерлинией и контуром  $PC$ , должны быть внешними.

Общие нелинейные силы и моменты, применяя метод малого параметра, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} F^{(2)} & = \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i^2 F_{ii}^{(2)} + \sum_{i=1, k=1}^6 \varepsilon_i \varepsilon_k F_{ik}^{(2)} + \\ & + \sum_{i=1}^6 \varepsilon_7 \varepsilon_i F_{i7}^{(2)} + \varepsilon_7^2 F_{77}^{(2)}; \\ M^{(2)} & = \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i^2 M_{ii}^{(2)} + \sum_{i=1, k=1}^6 \varepsilon_i \varepsilon_k M_{ik}^{(2)} + \\ & + \sum_{i=1}^6 \varepsilon_7 \varepsilon_i M_{i7}^{(2)} + \varepsilon_7^2 M_{77}^{(2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

При расчете коэффициента демпфирования для бортовой качки определялся на основании эмпирической формулы Авдеева – Анфимова [1].

Система дифференциальных уравнений качки с учетом найденных сил имеет вид:

$$\begin{cases}
 \left( M + \lambda_{11}^{(2)} \right) \ddot{\xi}_g^{(2)} + \lambda_{13}^{(2)} \ddot{\zeta}_g^{(2)} + \lambda_{15}^{(2)} \ddot{\psi}^{(2)} + \\
 + \mu_{11}^{(2)} \dot{\xi}_g^{(2)} + \mu_{13}^{(2)} \dot{\zeta}_g^{(2)} + \mu_{15}^{(2)} \dot{\psi}^{(2)} = F_X^{(2)} e^{-2j\omega_k t}; \\
 \left( M + \lambda_{22}^{(2)} \right) \ddot{\eta}_g^{(2)} + \lambda_{24}^{(2)} \ddot{\theta}^{(2)} + \lambda_{26}^{(2)} \ddot{\chi}^{(2)} + \\
 + \mu_{22}^{(2)} \dot{\eta}_g^{(2)} + \mu_{24}^{(2)} \dot{\theta}^{(2)} + \mu_{26}^{(2)} \dot{\chi}^{(2)} = F_Y^{(2)} e^{-2j\omega_k t}; \\
 \left( M + \lambda_{33}^{(2)} \right) \ddot{\zeta}_g^{(2)} + \lambda_{31}^{(2)} \ddot{\xi}_g^{(2)} + \lambda_{35}^{(2)} \ddot{\psi}^{(2)} + \\
 + \mu_{33}^{(2)} \dot{\zeta}_g^{(2)} + \mu_{31}^{(2)} \dot{\xi}_g^{(2)} + \mu_{35}^{(2)} \dot{\psi}^{(2)} + \rho g S \zeta_g^{(2)} - \\
 - \rho g S X_f \psi^{(2)} = F_Z^{(2)} e^{-2j\omega_k t}; \\
 \left( J_{xx} + \lambda_{44}^{(2)} \right) \ddot{\theta}^{(2)} + \lambda_{42}^{(2)} \ddot{\eta}_g^{(2)} + \lambda_{46}^{(2)} \ddot{\chi}^{(2)} + \\
 + \mu_{44}^{(2)} \dot{\theta}^{(2)} + \mu_{42}^{(2)} \dot{\eta}_g^{(2)} + \mu_{46}^{(2)} \dot{\chi}^{(2)} + D h_0 \theta^{(2)} = \\
 = M_x^{(2)} e^{-2j\omega_k t}; \\
 \left( J_{yy} + \lambda_{55}^{(2)} \right) \ddot{\psi}^{(2)} + \lambda_{51}^{(2)} \ddot{\xi}_g^{(2)} + \lambda_{53}^{(2)} \ddot{\zeta}_g^{(2)} + \\
 + \mu_{55}^{(2)} \dot{\psi}^{(2)} + \mu_{51}^{(2)} \dot{\xi}_g^{(2)} + \mu_{53}^{(2)} \dot{\zeta}_g^{(2)} + D H_0 \psi^{(2)} - \\
 - \rho g S X_f \zeta_g^{(2)} = M_y^{(2)} e^{-2j\omega_k t}; \\
 \left( J_{zz} + \lambda_{66}^{(2)} \right) \ddot{\chi}^{(2)} + \lambda_{62}^{(2)} \ddot{\eta}_g^{(2)} + \lambda_{64}^{(2)} \ddot{\theta}^{(2)} + \\
 + \mu_{66}^{(2)} \dot{\chi}^{(2)} + \mu_{62}^{(2)} \dot{\eta}_g^{(2)} + \mu_{64}^{(2)} \dot{\theta}^{(2)} = M_z^{(2)} e^{-2j\omega_k t}.
 \end{cases} \quad (18)$$

Ее решение отыскивается в виде, аналогичном системе первого порядка, хорошо известной в линейной теории качки:

$$\begin{cases}
 \xi_g^{(2)} = \xi_{g0}^{(2)} \sin \left( 2\omega_k t + \delta_{\xi}^{(2)} \right); \\
 \eta_g^{(2)} = \eta_{g0}^{(2)} \sin \left( 2\omega_k t + \delta_{\eta}^{(2)} \right); \\
 \zeta_g^{(2)} = \zeta_{g0}^{(2)} \sin \left( 2\omega_k t + \delta_{\zeta}^{(2)} \right); \\
 \theta^{(2)} = \theta_0^{(2)} \sin \left( 2\omega_k t + \delta_{\theta}^{(2)} \right); \\
 \psi^{(2)} = \psi_0^{(2)} \sin \left( 2\omega_k t + \delta_{\psi}^{(2)} \right); \\
 \chi^{(2)} = \chi_0^{(2)} \sin \left( 2\omega_k t + \delta_{\chi}^{(2)} \right).
 \end{cases} \quad (19)$$

Суммарные амплитудно-частотные характеристики отдельных видов качки на основании теории нелинейных колебаний определяются с учетом малых параметров следующим образом:

$$\begin{cases}
 \frac{\xi_g^*}{a_W} = \frac{\xi_g^{(1)}}{a_W} + \varepsilon_1 \frac{\xi_g^{(2)}}{a_W}; \\
 \frac{\eta_g^*}{a_W} = \frac{\eta_g^{(1)}}{a_W} + \varepsilon_2 \frac{\eta_g^{(2)}}{a_W}; \\
 \frac{\zeta_g^*}{a_W} = \frac{\zeta_g^{(1)}}{a_W} + \varepsilon_3 \frac{\zeta_g^{(2)}}{a_W}; \\
 \frac{\theta^*}{a_0} = \frac{\theta^{(1)}}{a_0} + \varepsilon_4 \frac{\theta^{(2)}}{a_0}; \\
 \frac{\psi^*}{a_0} = \frac{\psi^{(1)}}{a_0} + \varepsilon_5 \frac{\psi^{(2)}}{a_0}; \\
 \frac{\chi^*}{a_0} = \frac{\chi^{(1)}}{a_0} + \varepsilon_6 \frac{\chi^{(2)}}{a_0}.
 \end{cases} \quad (20)$$

## Основные результаты

### Main results

Все расчеты нелинейных сил и амплитуд проводились для 6 судов, основные характеристики которых приведены в табл. 1.

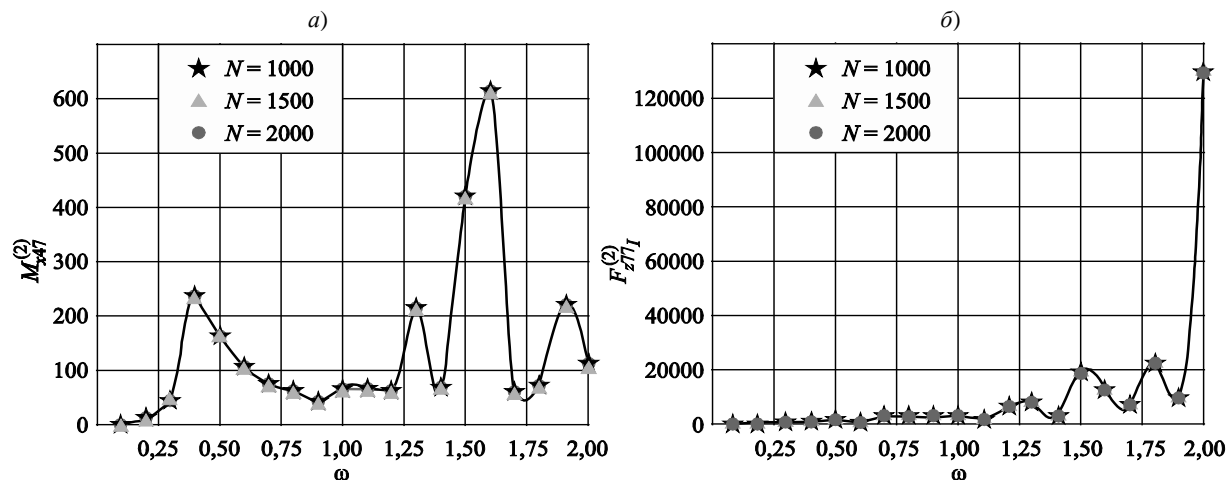
**Таблица 1.** Основные характеристики судов

**Tabl. 1.** Ship Main Data

Тип / название судна	$L$	$B$	$T$	$\delta$	$\alpha$	$h_0$	$Q$
Лихтеровоз «Алексей Косыгин»	232	32	10,6	0,57	0,82	3,99	970
Танкер «Баскунчак»	74	12,0	4,65	0,71	0,8	1,06	816
Балкер «Капитан Панфилов»	134	20,6	9,4	0,78	0,88	1,45	766
Лесовоз «Николай Новиков»	140	21	8,68	0,74	0,83	2,31	998
Сухогруз «Новгород»	138	20,6	9	0,68	0,79	1,00	952
Танкер	310	47,2	18,9	0,85	0,9	5,78	942

Здесь  $Q$  – количество панелей разбиения судна.

Для валидации программ были выполнены расчеты нелинейных сил при различной протяженности свободной поверхности вправо и влево от судна. Протяженность характеризуется параметром  $N$ , показывающим число панелей, приходящихся на



**Рис. 1.** Значения нелинейных сил и моментов при различном верхнем пределе интеграла по свободной поверхности: а)  $M_{x47}^{(2)}$  для сухогруза «Новгород»; б)  $F_{z771}^{(2)}$  для лихтеровоза «Алексей Косыгин»

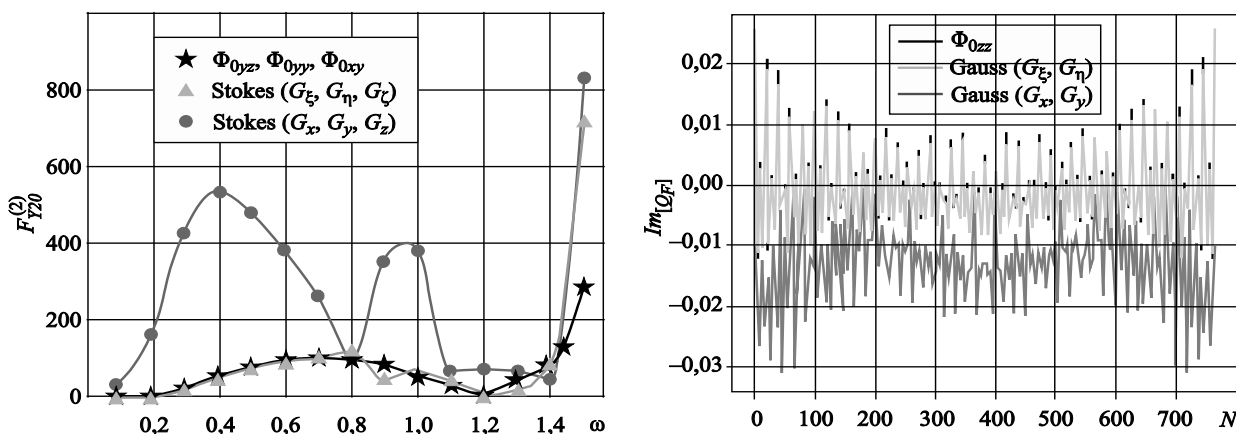
**Fig. 1.** Values of non-linear forces and moments at different upper limits of free-surface integral: а)  $M_{x47}^{(2)}$  for dry-cargo ship Novgorod; б)  $F_{z771}^{(2)}$  for LASH carrier Aleksey Kosygin

одно шпангоутное сечение в одну сторону от судна. Полученные результаты (рис. 1) показывают полное согласование расчетов между собой. Сеточная сходимость по свободной поверхности достигается уже при  $N = 1000$ .

Также проводится апробация обхода вторых производных по теореме Стокса и Гаусса. Для этого вторые производные потенциала набегающего волнения были вычислены аналитическим способом и с помощью обхода этих производных для граничного условия на смоченной поверхности и для граничного условия на свободной поверхности (рис. 2). При

этом вычисление производных функций Грина производилось по координатам  $x, y, z$  и  $\xi, \eta, \zeta$ . Доказано, что результаты при использовании теорем Стокса и Гаусса совпадают с аналитическим решением только в том случае если производные функций Грина брать по координатам  $\xi, \eta, \zeta$ .

Расчеты нелинейных сил всех четырех категорий, полученных по трехмерным методам, сопоставлялись с результатами, выполненными по двумерным теориям [2, 3]. Характерные результаты приведены на рис. 3. Все нелинейные силы приведены на графиках в отношении к квадрату полувысоты волны.



**Рис. 2.** Результаты для балкера «Капитан Панфилов»: а) сравнение обхода для  $F_{y20}^{(2)}$  по теореме Стокса; б) обход второй производной по теореме Гаусса

**Fig. 2.** Results for bulker Kapitan Panfilov: а) comparison of rotation for  $F_{y20}^{(2)}$  as per Stokes theorem; б) rotation of second derivative as per Gauss theorem

Из приведенных сравнений наблюдается практически полное согласование результатов, полученных по различным теориям.

В выполненной работе проводится оценка влияния различных категорий нелинейных сил на суммарные силы, при этом рассматривался случай расположения судна лагом. Сравнение результатов отдельных составляющих нелинейных сил в сравнении с суммарными приведены на рис. 4 (см. вклейку).

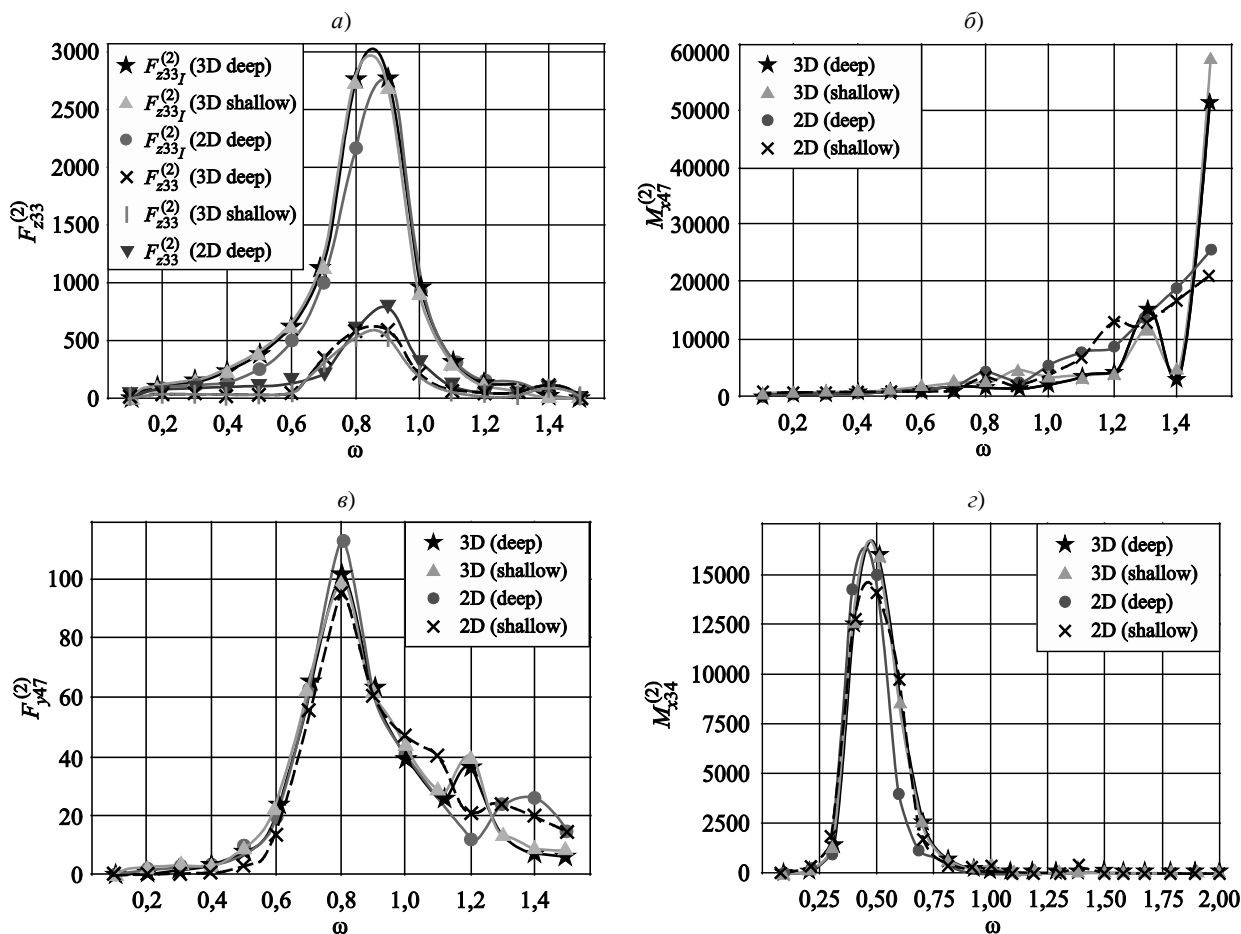
Из приведенных результатов видно, что в области частот  $\omega < 1,0$  отдельные категории нелинейных сил и моментов имеют равнозначное влияние. При этом влияние одной и той же силы может по-разному проявляться для разных судов. В области частот  $\omega > 1,0$  очевидно преобладают

влияние нелинейных сил и моментов, обусловленных дифракцией. Поскольку нелинейные силы второго порядка вызывают наибольшие амплитуды качки именно в зоне частот  $\omega < 1,0$ , очевидно, что необходимо учитывать все их составляющие.

Расчеты амплитуд вторых гармоник качки проводились на основании решения системы дифференциальных уравнений (18) для различных типов судов, характеристики которых представлены в табл. 1. Амплитуды второго порядка приведены

$$\text{в следующем виде [4]: } \frac{\eta^{(2)} B}{a_w^2} \frac{B}{2}, \frac{\zeta^{(2)} B}{a_w^2} \frac{B}{2}, \frac{\theta^{(2)} B}{a_w^2} \frac{B}{4}.$$

В целях апробации расчеты амплитуд поперечной качки по программе, использующей функцию



**Рис. 3.** Нелинейные силы: а)  $F_{z33}^{(2)}$  для сухогруза «Новгород»; б)  $M_{x77}^{(2)}$  для сухогруза «Новгород»; в)  $F_{y47}^{(2)}$  для танкера «Баскунчак»; г)  $M_{x34}^{(2)}$  для балкера «Капитан Панфилов»

**Fig. 3.** Non-linear forces: а)  $F_{z33}^{(2)}$  for dry-cargo ship *Novgorod*; б)  $M_{x77}^{(2)}$  for dry-cargo ship *Novgorod*; в)  $F_{y47}^{(2)}$  for tanker *Baskunchak*; г)  $M_{x34}^{(2)}$  for bulker *Kapitan Panfilov*

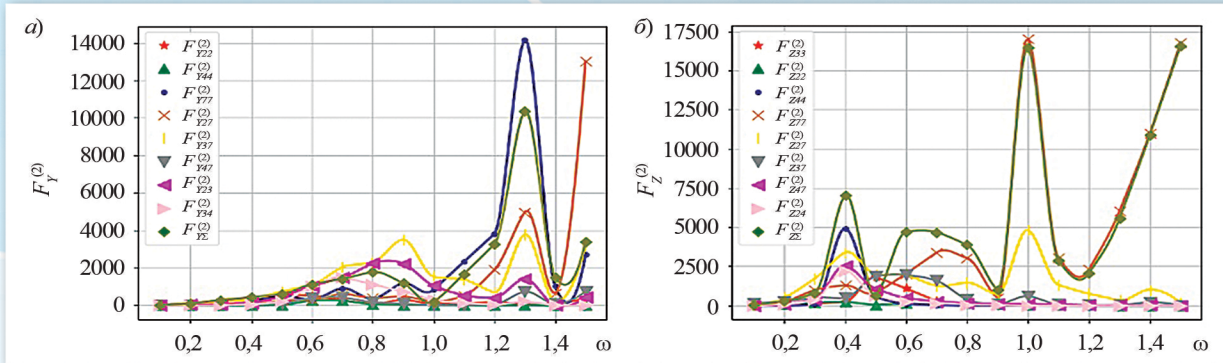


Рис. 4. Суммарные нелинейные силы.  $F_Y^{(2)}$  для лесовоза «Николай Новиков» (а),  $F_Z^{(2)}$  для танкера (б)

Fig. 4. Total non-linear forces: а)  $F_Y^{(2)}$  for timber carrier Nikolai Novikov; б)  $F_Z^{(2)}$  for tanker

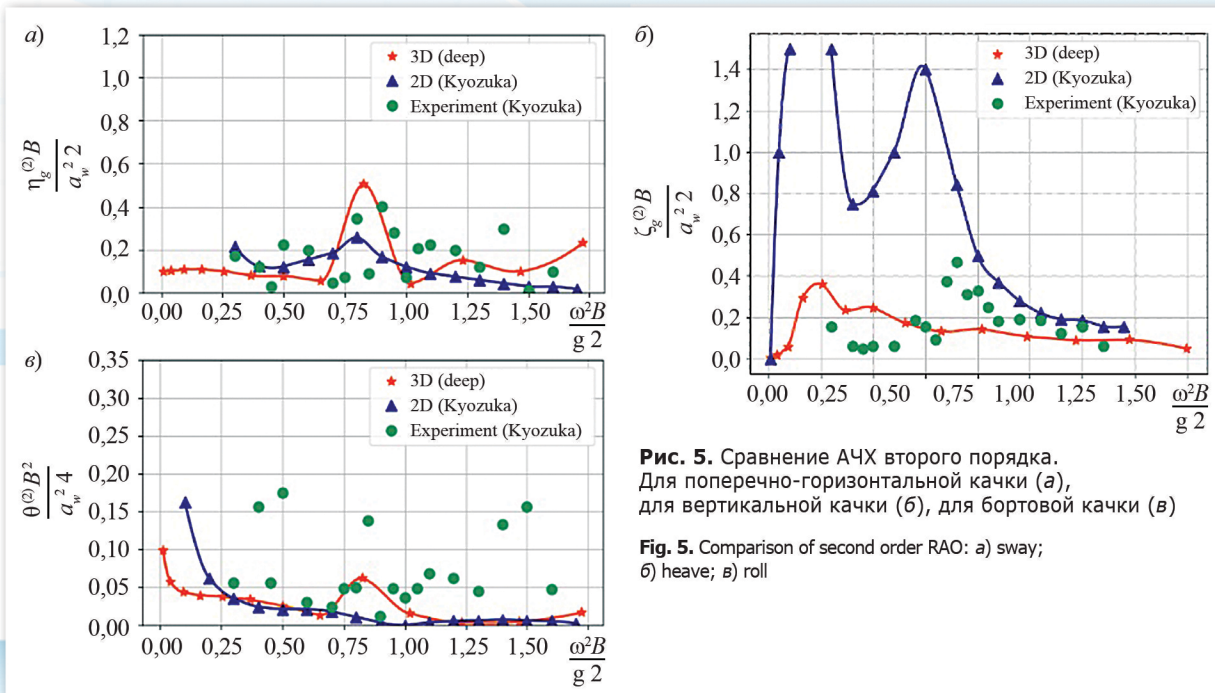


Рис. 5. Сравнение АЧХ второго порядка. Для поперечно-горизонтальной качки (а), для вертикальной качки (б), для бортовой качки (в)

Fig. 5. Comparison of second order RAO: а) sway; б) heave; в) roll

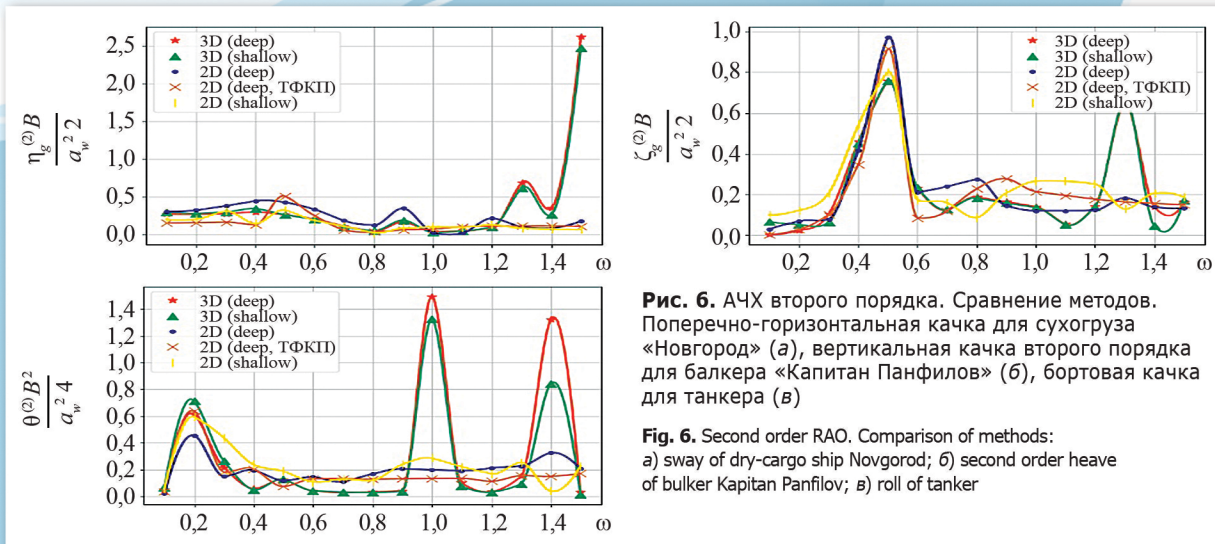
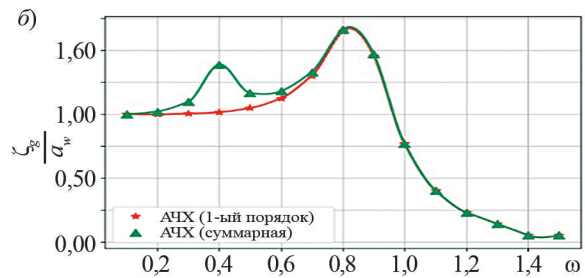
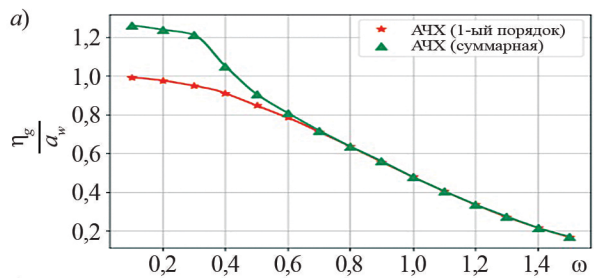


Рис. 6. АЧХ второго порядка. Сравнение методов. Поперечно-горизонтальная качка для сухогруза «Новгород» (а), вертикальная качка второго порядка для балкера «Капитан Панфилов» (б), бортовая качка для танкера (в)

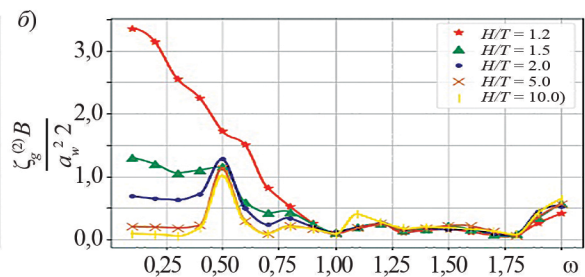
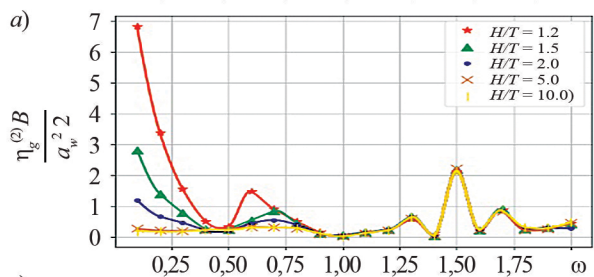
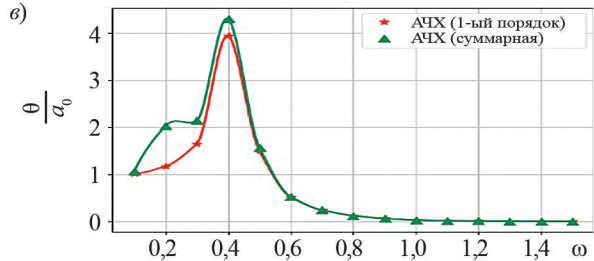
Fig. 6. Second order RAO. Comparison of methods: а) sway of dry-cargo ship Novgorod; б) second order heave of bulker Kapitan Panfilov; в) roll of tanker





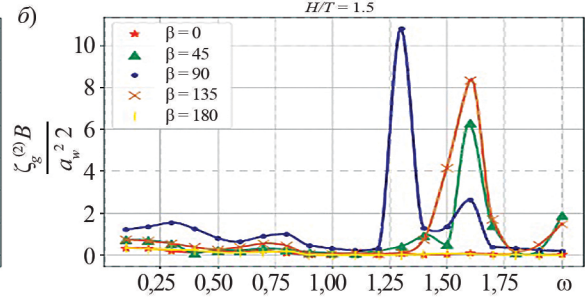
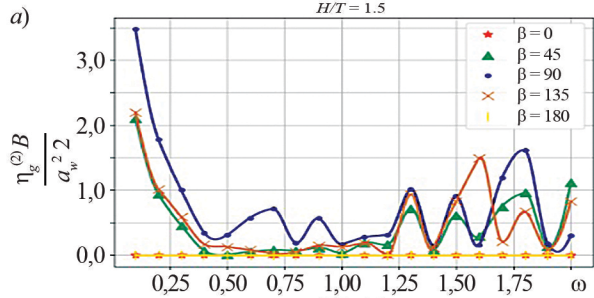
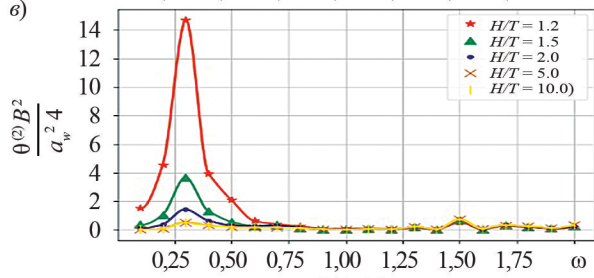
**Рис. 7.** Сравнение суммарной АЧХ и АЧХ первого порядка для сухогруза «Новгород». Для поперечно-горизонтальной качки (а), для вертикальной качки (б), для бортовой качки (в)

**Fig. 7.** Comparison of total RAO and first order RAO for dry-cargo ship Novgorod: а) sway; б) heave; в) roll



**Рис. 8.** АЧХ второго порядка при различных H/T. Поперечно-горизонтальная качка для лесовоза «Николай Новиков» (а), вертикальная качка для лихтеровоза «Алексей Косыгин» (б), бортовая качка для лесовоза «Николай Новиков» (в)

**Fig. 8.** Second order RAO at different H/T: а) sway of timber carrier Nikolai Novikov; б) heave of LASH carrier Aleksey Kosygin; в) roll of timber carrier Nikolai Novikov



**Рис. 9.** АЧХ второго порядка при различных курсовых углах на мелководье для лесовоза «Николай Новиков» при H/T=1.5. Для поперечно-горизонтальной качки (а), для вертикальной качки (б), для бортовой качки (в)

**Fig. 9.** Second order RAO at different headings of timber carrier Nikolai Novikov in shallow water at H/T = 1.5: а) sway; б) heave; в) roll

Грина для бесконечно глубокой жидкости, были сопоставлены с экспериментом и расчетом Ю. Кёзуки (Y. Kuozuka) [4] для цилиндрического отсека, имеющего в поперечном сечении U-образную форму. Основные характеристики отсека:  $L = 0,6$  м,  $B = 0,2$  м,  $T = 0,08$  м,  $\delta = 0,95$ ,  $\alpha = 1,0$ ,  $h_0 = 0,8$  м. Сравнение амплитуд второго порядка приведено на рис. 5 (см. вклейку) в зависимости от безразмерного волнового числа  $\frac{\omega^2 B}{g^2}$ .

Амплитуды вторых гармоник поперечно-горизонтальной качки, полученных на основании разработанной программы, лучшим образом совпадают с экспериментом в области безразмерных частот  $0,5 < \frac{\omega^2 B}{g^2} < 1,0$ , чем расчеты Ю. Кёзуки

(рис. 5а см. вклейку). В случае вертикальной качки результаты расчетов по трехмерной теории значительно ближе к экспериментальным данным, чем

расчеты Ю. Кёзуки. В зоне частот  $1,0 < \frac{\omega^2 B}{g^2} < 1,5$

расчеты, полученные автором, и вовсе совпадают с экспериментом.

В случае бортовой качки разброс экспериментальных значений достаточно высок. Тем не менее результаты расчетов, полученных по трехмерной теории, хорошо совпадают с расчетами

Ю. Кёзуки в зоне частот  $0,25 < \frac{\omega^2 B}{g^2} < 2$  (рис. 5в см. вклейку).

Далее, расчеты амплитуд второго порядка, полученные при использовании разработанных программ для бесконечно глубокой жидкости и жидкости ограниченной глубины (при  $H/T \rightarrow \infty$ ), были сопоставлены с аналогичными расчетами по двумерной теории и с расчетами по комбинированному методу, использующему конформное отображение шпангоутов и теорию функций комплексных переменных. Сравнения расчетов амплитуд вторых гармоник поперечно-горизонтальной качки, вертикальной качки и бортовой представлены на рис. 6 (см. вклейку).

Анализ полученных результатов сравнений для различных типов судов показал хорошее согласование расчетов при использовании разработанных трехмерных методов с различными двумерными методами для бортовой и вертикальной качки в зонах супергармонических резонансных режимов

и для поперечно-горизонтальной качки в зоне частот  $\omega < 1,2$ .

В целях оценки влияния нелинейных сил второго порядка на амплитуды были рассчитаны суммарные АЧХ по формулам (20). Некоторые из них приведены на рис. 7 (см. вклейку) в сравнении с АЧХ первого порядка, найденного в рамках линейной теории. Результаты приведены на основании расчетов, реализуемых по программе для бесконечно глубокой жидкости.

Из приведенных результатов видно, что для поперечно-горизонтальной качки влияние нелинейных факторов проявляется в зоне частот  $\omega < 0,5$  и для различных типов судов может составлять от 10 до 25 %. В случае вертикальной и бортовой качки влияние нелинейных сил сосредоточено в зонах супергармонических резонансных режимов и составляет для вертикальной качки от 20 для 50 %, для бортовой – от 20 до 100 %.

На рис. 8 (см. вклейку) приведены результаты расчетов амплитуд вторых гармоник поперечно-горизонтальной, вертикальной и бортовой качки для различных относительных глубин.

В случае поперечно-горизонтальной качки влияние изменения  $H/T$  проявляется в зоне частот  $\omega < 0,7$ . При этом уменьшение  $H/T$  приводит к значительному увеличению амплитуд вторых гармоник, особенно в зоне частот  $\omega < 0,3$ . В случае вертикальной и бортовой качки влияние изменения относительной глубины имеет место в зонах супергармонических резонансов. Здесь наблюдается значительное увеличение амплитуд вторых гармоник при уменьшении  $H/T$ . Особенно резкий рост отмечается при  $H/T = 1,2$ .

При расчете суммарных амплитудно-частотных характеристик на мелководье было выявлено, что влияние нелинейных факторов в случае бортовой и вертикальной качки может превышать 70 %.

Были проведены систематические расчеты качки второго порядка различных типов судов с целью исследования влияния на амплитуды ее вторых гармоник курсового угла. Влияние курсового угла исследовалось как в бесконечно глубокой жидкости, так и на мелководье. На рис. 9 (см. вклейку) представлены результаты расчетов влияния курсового угла на амплитуды качки при  $H/T = 1,5$ .

Анализ результатов, проведенный для различных судов и разных относительных глубин, показал, что зависимости амплитуд вторых гармоник продольно-горизонтальной качки, поперечно-

горизонтальной, бортовой, вертикальной и рысканья от курсового угла на мелководье полностью совпадают с зависимостями бесконечно глубокой жидкости.

Проведенные исследования показали, что максимальные амплитуды поперечно-горизонтальной, вертикальной и бортовой качки имеют место при расположении судна лагом, продольно-горизонтальной и килевой – на встречном волнении, рысканья – в большинстве случаев на косом волнении.

## Заключение

### Conclusion

Разработаны модернизированные численные методы и программы расчета нелинейных сил, позволяющие определять потенциалы второго порядка для случаев бесконечно глубокой жидкости и мелководья; проведена апробация сеточной сходимости; проведена апробация обхода вычисления вторых производных потенциалов с помощью теорем Гаусса и Стокса; проведены расчеты и исследования различных категорий нелинейных сил, действующих на судно; выполнено сравнение расчетов АЧХ поперечной качки с результатами эксперимента и с результатами расчетов по двумерной теории; показано максимальное действие нелинейных сил в зоне супергармонических резонансных режимов вертикальной, килевой и бортовой качки; проведены исследования и систематические расчеты амплитуд вторых гармоник различных видов качки при изменении курсовых углов, скоростей хода и относительных глубин. Показано значительное влияние данных параметров на величину амплитуд.

## Список использованной литературы

1. *Луговский В.В.* Гидродинамика нелинейной качки судов. Ленинград : Судостроение, 1980. 256 с.
2. *Семенова В.Ю.* Разработка метода расчета нелинейной качки судов : дис. ... д-ра техн. наук : 05.08.01 / С.-Петерб. гос. мор. техн. ун-т. Санкт-Петербург, 2005. 360 с.
3. *Со Чжо Ту.* Разработка метода расчета нелинейных сил второго порядка, возникающих при качке судна на мелководье : дис. ... канд. техн. наук : 05.08.01 / С.-Петерб. гос. мор. техн. ун-т. Санкт-Петербург, 2014. 155 с.
4. *Kyozuka Y.* Experimental Study on Second-Order Forces acting on cylindrical body in waves // Proceedings

- of the 14th Symposium on Naval Hydrodynamics : propeller-related problems, cavitation, nonlinear free-surface problems, viscous fluid problems. Washington : National Academy Press, 1983. P. 319–382.
5. *Lee C.H., Zhu X.* Second-order diffraction and radiation solutions on floating bodies // Proceedings of 8th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies. London : RINA, 1994. Vol. 1. P. 61–64.
6. *Lee C.H.* Wamit theory manual / Massachusetts institute of technology, Department of Ocean Engineering. Cambridge, 1995. Var. pag. (64 p.). (Massachusetts institute of technology Report ; № 95-2).
7. *Molin B.* Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies // Applied Ocean Research. 1979. Vol.1, № 4. P.197–202.
8. *Zaraphonitis G., Papanikolaou A.* On the Calculation of the Second-Order Free Surface Inhomogeneity for 3D Ship Motion Problems // Proceedings of 3rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Cambridge, 1988. 4 p.
9. *Zaraphonitis G.N., Papanikolaou A.D.* Second-order theory and calculations of motions and loads of arbitrarily shaped 3D bodies in waves // Marine structures. 1993. Vol. 6, № 2-3. P. 165–185.

### References

1. *Lugovskiy V.V.* Hydrodynamics of non-linear ship motions. Leningrad: Sudostroenie, 1980. 256 p. (*in Russian*).
2. *Semenova V.Yu.* Development of calculation method for non-linear ship motions/St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, 2005 (*in Russian*).
3. *So Jo Tu.* Development of calculation method for second order non-linear forces generated at ship motions in shallow water. Dissertation of Cand. Sc. (Tech): 05.08.01 / St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, 2014. 155 p. (*in Russian*).
4. *Kyozuka Y.* Experimental Study on Second-Order Forces acting on cylindrical body in waves // Proceedings of the 14th Symposium on Naval Hydrodynamics : propeller-related problems, cavitation, nonlinear free-surface problems, viscous fluid problems. Washington : National Academy Press, 1983. P. 319–382.
5. *Lee C.H., Zhu X.* Second-order diffraction and radiation solutions on floating bodies // Proceedings of 8th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies. London : RINA, 1994. Vol. 1. P. 61–64.
6. *Lee C.H.* Wamit theory manual / Massachusetts institute of technology, Department of Ocean Engineering. Cambridge, 1995. Var. pag. (64 p.). (Massachusetts institute of technology Report ; № 95-2).

7. *Molin B.* Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies // *Applied Ocean Research*. 1979. Vol.1, № 4. P.197–202.
8. *Zaraphonitis G., Papanikolaou A.* On the Calculation of the Second-Order Free Surface Inhomogeneity for 3D Ship Motion Problems // *Proceedings of 3rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*. Cambridge, 1988. 4 p.
9. *Zaraphonitis G.N., Papanikolaou A.D.* Second-order theory and calculations of motions and loads of arbitrarily shaped 3D bodies in waves // *Marine structures*. 1993. Vol. 6, № 2-3. P. 165–185.

### **Сведения об авторе**

*Альбаев Данил Айдарович*, Санкт-Петербургский Государственный Морской Технический Университет, г. СПб, ул. Лоцманская д. 3; старший преподаватель кафедры теории корабля; 89531517676; albaevdaniil@gmail.com; <https://orcid.org/0000-0001-5175-6594>.

### **About the author**

*Daniil A. Albaev*, Senior Lecturer, Department of Ship Theory, St. Petersburg State Marine Technical University. Address: 3, Lotsmanskaya st., St. Petersburg, Russia, post code 190121. E-mail: albaevdaniil@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-5175-6594>.

Поступила / Received: 05.07.23  
Принята в печать / Accepted: 26.07.23  
© Альбаев Д.А., 2023